

Глава 5

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

§ 15. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Основные формулы

Сила, действующая на элемент длины проводника с током I , помещенного в магнитное поле, (сила Ампера)

$$dF = I |d\mathbf{l} \times \mathbf{B}|, \quad (15.1)$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор элемента длины проводника, проведенный в направлении тока, \mathbf{B} — вектор магнитной индукции

Сила, действующая на электрический заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} в магнитном поле, (сила Лоренца)

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (15.2)$$

где \mathbf{B} — магнитная индукция поля

Закон Био — Савара: вектор индукции магнитного поля, созданного элементом проводника $d\mathbf{l}$, по которому идет ток I , равен

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}], \quad (15.3)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный от элемента $d\mathbf{l}$ до той точки в которой определяется индукция поля; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м — магнитная постоянная. В скалярной форме

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(\widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{r}})}{r^2}. \quad (15.4)$$

Магнитная индукция в произвольной точке A (рис. 15-1) поля, созданного прямолинейным проводником с током I

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \quad (15.5)$$

где a — расстояние от точки A до проводника; φ_1, φ_2 — углы, образованные радиусом-вектором, проведенным в точку A соответственно из начала и конца проводника, с направлением тока.

Магнитная индукция в центре дуги окружности длиной L , обтекаемой током I ,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IL}{R^2}, \quad (15.6)$$

где R — радиус окружности.

Циркуляция вектора магнитной индукции \mathbf{B} вдоль замкнутого контура L равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром, умноженной на μ_0 :

$$\oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \oint_L B dl \cos(\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 \Sigma I. \quad (15.7)$$

Магнитная индукция на оси длинного соленоида с током I в точках, близких к его середине,

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} = \mu_0 nI, \quad (15.8)$$

где $n = N/l$ — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида

Магнитный момент замкнутого плоского контура, обтекаемого током I ,

$$p_M = IS, \quad (15.9)$$

где S — вектор, численно равный площади, ограниченной контуром; направление этого вектора совпадает с положительным направлением нормали к плоскости контура и связано с направлением тока в контуре правилом правого винта.

Механический момент, действующий на замкнутый контур с током в однородном магнитном поле с индукцией B ,

$$M = [p_M B]. \quad (15.10)$$

Поток вектора магнитной индукции B (магнитный поток) сквозь поверхность S определяется интегралом

$$\Phi = \int_S B_n dS, \quad (15.11)$$

где B_n — проекция вектора B на направление нормали к элементу площади dS .

Работа сил магнитного поля по перемещению замкнутого контура с постоянным током I равна

$$A = I\Delta\Phi, \quad (15.12)$$

где $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ — изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.

Методические указания

1. Основной характеристикой магнитного поля служит вектор магнитной индукции B . Его модуль и направление устанавливаются формулами (15.1) или (15.2), выражающими силу Ампера или силу Лоренца соответственно.

Задачи по электромагнетизму на расчет магнитной индукции B при заданном распределении токов, создающих магнитное поле, решают с помощью закона Био — Савара (15.3), (15.4) и принципа суперпозиции магнитных полей. В силу этого принципа магнитная индукция B в любой точке магнитного поля проводника с током равна векторной сумме магнитных индукций dB , созданных в этой точке всеми элементами dl проводника с током, т. е.

$$B = \int_l dB, \quad (1)$$

где интегрирование проводится по всей длине проводника*.

Из принципа суперпозиции полей следует также, что если магнитное поле создано несколькими проводниками с током, то вектор B

* Этот метод применяется лишь в тех случаях, когда для расчета поля нельзя воспользоваться формулами (15.5), (15.6), (15.8) и другими, выведенными с помощью закона Био — Савара или соотношения (15.7).

в какой-либо точке этого поля равен векторной сумме магнитных индукций, созданных в этой точке каждым током в отдельности, т. е.

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i, \quad (2)$$

где n — число проводников с токами.

Чтобы, применяя соотношения (1) и (2), получить правильный результат, необходимо знать направления складываемых векторов $d\mathbf{B}$ или \mathbf{B}_i . Как это следует из закона Био — Савара (15.3), вектор $d\mathbf{B}$ всегда нормален к плоскости, содержащей векторы $d\mathbf{l}$, \mathbf{r} . Поэтому в тех случаях, когда проводник с током и точка, в которой находят вектор \mathbf{B} , лежат в одной плоскости, все элементарные векторы $d\mathbf{B}$ направлены вдоль одной прямой. Тогда геометрическое сложение заменяется алгебраическим. В остальных случаях складываемые векторы $d\mathbf{B}$ не лежат на одной прямой. Тогда для вычисления интеграла (1) поступают таким же образом, как и в аналогичных задачах электростатики при вычислении вектора \mathbf{E} (смотрите стр. 104). В частности, если магнитное поле обладает осевой симметрией и точка, в которой отыскивают магнитную индукцию, лежит на этой оси, то искомым вектор \mathbf{B} направлен вдоль этой оси. Его величина определяется интегралом, взятым по всей длине l проводника:

$$B = \int_l dB_x,$$

где dB_x — составляющая вектора $d\mathbf{B}$ вдоль оси симметрии поля.

2. Расчеты *симметричных* магнитных полей значительно упрощаются благодаря применению теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции [см. формулу (15.7)]. При этом важно, чтобы через точку, в которой требуется определить вектор \mathbf{B} , можно было провести такой замкнутый контур L , совпадающий с линией индукции поля, для всех точек которого выполнялось бы соотношение $B = \text{const}$. В этом случае для всех элементов контура $\cos(\mathbf{B}, \hat{dl}) = 1$ и уравнение (15.7) приобретает простой вид:

$$BL = \mu_0 \Sigma I.$$

3. Вектор напряженности \mathbf{H} магнитного поля является вспомогательной величиной, которую вводят для описания поля в *магнитных средах* (см. § 17). Если все же в задаче требуется вычислить напряженность магнитного поля в *вакууме*, то, найдя одним из описанных выше методов магнитную индукцию \mathbf{B} , легко определить и напряженность поля \mathbf{H} , используя соотношение

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0,$$

вытекающее из формулы (17.2) или (17.3).

4. Если требуется определить силу, с которой заданное магнитное поле действует на проводник с током, то сначала по формуле (15.1) находят силу $d\mathbf{F}$, действующую на произвольный элемент dl длины про-

водника (силу Ампера), а затем интегрируют полученное выражение по всей длине проводника, учитывая направление складываемых векторов $d\mathbf{F}$.

Когда в задаче рассматривается *замкнутый контур*, находящийся в магнитном поле, то различают два случая:

1) магнитное поле однородно. Тогда на контур с током действует вращающий момент, определяемый формулой (15.9). Под влиянием этого момента контур поворачивается так, что угол α между векторами \mathbf{p}_m , \mathbf{B} уменьшается. При $\alpha = 0$ наступает состояние устойчивого равновесия контура в магнитном поле;

2) магнитное поле неоднородно. В этом случае на контур с током кроме вращающего момента действует сила, определяемая формулой, приводимой, например, в учебниках [3], [6]:

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos(\widehat{\mathbf{p}_m, \mathbf{B}})$$

(здесь x — направление быстрого изменения величины B). Следует иметь в виду, что эта формула справедлива только при следующих условиях: а) магнитное поле таково, что направления оси x и вектора \mathbf{B} совпадают (таково, например, поле соленоида в точках, лежащих на его оси вблизи концов соленоида); б) контур с током достаточно мал для того, чтобы во всех точках ограниченной им плоскости можно было считать величину B приблизительно одинаковой.

Общий метод нахождения силы, действующей на контур с током в неоднородном магнитном поле, основанный на законе сохранения энергии, применен в задаче № 15-5.

Решение задач

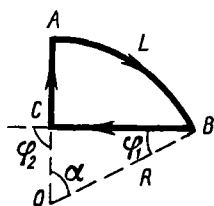


Рис. 15-2

15-1. По контуру, изображенному на рис. 15-2, идет ток силой $I = 10,0$ А. Определить магнитную индукцию в точке O , если радиус дуги $R = 10,0$ см, $\alpha = 60^\circ$.

Решение. В силу принципа суперпозиции полей магнитная индукция \mathbf{B} в точке O равна векторной сумме магнитных индукций, созданных всеми элементами контура с током. Разобьем весь контур на три участка — дугу AB и прямолинейные отрезки BC , CA , чтобы для вычисления их магнитных полей можно было воспользоваться формулами (15.5) и (15.6). Тогда получим

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{AB} + \mathbf{B}_{BC} + \mathbf{B}_{CA}. \quad (1)$$

Сначала вычислим модули всех трех слагаемых. Поскольку угол $\alpha = 60^\circ$, дуга AB составляет $1/6$ часть окружности, т. е. $L = 2\pi R/6 = \pi R/3$. Подставив это значение L в (15.6), найдем

$$B_{AB} = \frac{\mu_0}{12} \frac{I}{R}. \quad (2)$$

Далее по формуле (15.5) определим величину B_{BC} . Из рис. 15-2 видно, что углы, входящие в эту формулу, равны: $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$. Расстояние от точки O до провода BC равно $a = OC = R \sin \varphi_1 = R/2$. Подставив значения a , φ_1 , φ_2 в формулу (15.5), имеем

$$B_{BC} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R}. \quad (3)$$

Попробуем применить выражение (15.5) для вычисления магнитной индукции, созданной проводником CA в точке O . Поскольку точка O лежит на продолжении проводника CA , каждый из углов φ_1 , φ_2 равен π . Следовательно, числитель формулы (15.5) равен нулю. Нулю равен и знаменатель этой формулы, так как расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Таким образом, выражение (15.5) оказывается непригодным для расчета величины B_{CA} .

Обратимся непосредственно к уравнению (15.4), выражающему в скалярной форме закон Био — Савара, с помощью которого выведена формула (15.5). Для любого элемента dl проводника CA угол, образованный этим элементом (взятым по направлению тока) и радиусом-вектором \mathbf{r} , проведенным от элемента в точку O , равен π . Следовательно, $\sin(\widehat{dl, \mathbf{r}}) = 0$. Однако при этом знаменатель формулы (15.4) отличен от нуля. Таким образом, $dB = 0$ для любого элемента проводника CA . Отсюда ясно, что и весь проводник CA не создает в точке O магнитного поля. Тогда соотношение (1) упростится:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{AB} + \mathbf{B}_{BC}. \quad (4)$$

Поскольку точка O и контур ABC лежат в одной плоскости, оба вектора \mathbf{B}_{AB} , \mathbf{B}_{BC} , будучи перпендикулярными этой плоскости [это следует из формулы (15.3)], оказываются расположенными вдоль одной прямой — нормали к плоскости чертежа, проходящей через точку O . При этом, согласно правилу правого винта, вектор \mathbf{B}_{AB} направлен от наблюдателя, вектор \mathbf{B}_{BC} — к наблюдателю. Приняв одно из этих направлений (например, второе) за положительное, можно вместо (4) написать скалярное равенство

$$B = B_{BC} - B_{AB},$$

или с учетом (2) и (3)

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12} \right) \frac{\mu_0 I}{R}.$$

Подставив в эту формулу величины, выраженные в единицах СИ: $I = 10,0 \text{ А}$, $R = 0,100 \text{ м}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м}$, и произведя вычисления, получим

$$B = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ Т} = 6,9 \text{ мкТ.}$$

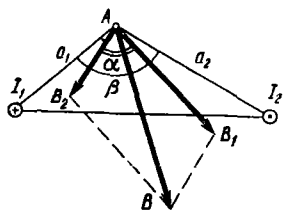


Рис 15 3

15-2. По двум длинным параллельным проводам текут в противоположных направлениях токи силой $I_1 = I_2 = I = 10,0 \text{ А}$. Расстояние между проводами $a = 0,30 \text{ м}$. Определить магнитную индукцию в точке A , удаленной от первого и второго проводов соответственно на расстояния $a_1 = 0,15 \text{ м}$, $a_2 = 0,20 \text{ м}$.

Решение. Согласно принципу суперпозиции полей магнитная индукция в точке A равна векторной сумме магнитных индукций, созданных каждым током в отдельности:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Однако здесь в отличие от предыдущей задачи точка A , в которой надо определить поле, и оба параллельных провода не лежат в одной плоскости (в противном случае имело бы место одно из двух равенств $a = a_1 + a_2$; $a = |a_1 - a_2|$). Поэтому векторы \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 не коллинеарны. Пусть они образуют угол α . Тогда модуль вектора \mathbf{B} на основании теоремы косинусов равен

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos \alpha} \quad (1)$$

Величины B_1 , B_2 можно найти по формуле (15.5). Так как в условии задачи речь идет о *длинных* проводниках, то ясно, что точка A удалена от концов каждого провода на значительно большее расстояние, чем от самого провода. Из рис. 15-1 видно, что в этом случае в формуле (15,5) следует положить: $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \pi$. Тогда получим

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}. \quad (2)$$

Чтобы определить $\cos \alpha$, входящий в формулу (1), учтем, что каждый из векторов \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 лежит в плоскости, перпендикулярной соответствующему проводнику с током. Поэтому на рис. 15-3, выполненном в плоскости, содержащей векторы \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , оба проводника проектируются в точки. В соответствии с принятым обозначением ток I_1 показан направленным от наблюдателя, ток I_2 — к наблюдателю. Векторы \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 изображены на рисунке так, что их направление связано с направлением соответствующих токов правилом правого винта.

Пусть угол между отрезками a_1 , a_2 равен β . Поскольку каждый из векторов \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 перпендикулярен соответствующему отрезку, должно выполняться равенство

$$\alpha + \beta = \pi. \quad (3)$$

По теореме косинусов имеем

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos \beta. \quad (4)$$

Из соотношений (3), (4) следует

$$\cos \alpha = -\cos \beta = \frac{a^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}. \quad (5)$$

Подставив в (1) значения B_1 , B_2 , определяемые по формуле (2), а также $\cos \alpha$ из (5), найдем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{2}{a_1 a_2} \left(\frac{a^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2} \right)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ia}{a_1 a_2}.$$

Подставив числовые значения величин (все они даны в СИ) и произведя вычисление, получим ответ:

$$B = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Т} = 20 \text{ мкТ}.$$

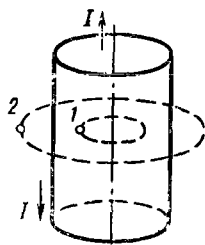


Рис 15 4

15-3. Коаксиальный кабель представляет собой длинную металлическую тонкостенную трубку радиуса $R = 10$ мм, вдоль которой расположен тонкий провод. Силы токов в трубке и проводе равны, направления противоположны. Определить магнитную индукцию в точках 1 и 2 (рис. 15-4), удаленных соответственно на расстояния $r_1 = 8,0$ мм и $r_2 = 15$ мм от оси кабеля, если сила тока $I = 0,50$ А.

Решение. Магнитная индукция в каждой из точек 1 и 2 равна векторной сумме магнитных индукций, созданных двумя токами: трубки и осевого провода. Индукция тока осевого провода выражается формулой (15.5) или, точнее, формулой (2) задачи № 15-2 для *длинного* прямолинейного проводника с током. Разбив трубку на тонкие полоски, параллельные осевому проводу, можно представить ток трубки как совокупность параллельных токов, идущих по этим полоскам. Поле каждого такого тока определяется формулой (15.5). Таким образом, задачу можно решить суммированием (интегрированием) магнитных индукций $d\mathbf{B}$ элементарных прямолинейных проводников с током. Однако этот метод неудобен, так как хотя магнитное поле тока, текущего по коаксиальному кабелю, является осесимметричным (его ось симметрии совпадает с осью кабеля), точки 1 и 2 не лежат на этой оси. Поэтому при суммировании векторов $d\mathbf{B}$, имеющих различное направление, нельзя воспользоваться соображениями симметрии.

Симметрия магнитного поля тока коаксиального кабеля позволяет решить задачу, применив теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Действительно, из соображений симметрии следует, что линии индукции магнитного поля тока кабеля, являясь замкнутыми, должны иметь форму окружностей, центры которых лежат на оси кабеля и плоскости которых перпендикулярны этой оси. При этом из

тех же соображений симметрии вытекает, что во всех точках одной и той же линии индукции величина B одинакова. В этом случае целесообразно применить формулу (15.7) (см. п. 2 методических указаний).

В качестве контура интегрирования рассмотрим линию индукции, проходящую через точку I . Учитывая, что для всех элементов этой линии $\cos(\mathbf{B}_1, \hat{dl}) = 1$, запишем

$$\oint B_1 dl \cos(\mathbf{B}_1, \hat{dl}) = B_1 \oint dl = 2\pi r_1 B_1 = \mu_0 I,$$

откуда

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_1}.$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м, $I = 0,50$ А, $r_1 = 5,0 \cdot 10^{-3}$ м. Выполнив вычисление, найдем

$$B_1 = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Т} = 20 \text{ мкТ}.$$

Аналогично определим величину B_2 . Для этого в качестве контура интегрирования возьмем линию индукции, проходящую через точку 2. Поскольку контур интегрирования охватывает два тока, равных по модулю и противоположно направленных, то

$$\oint B_2 dl \cos(\mathbf{B}_2, \hat{dl}) = B_2 \oint dl = 2\pi r_2 B_2 = \mu_0 (I - I) = 0,$$

откуда

$$B_2 = 0.$$

З а м е ч а н и е. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы: 1. Магнитное поле тока, идущего по коаксиальному кабелю, сосредоточено целиком внутри кабеля. 2. Это поле таково, как если бы его создавал один ток, идущий по осевому проводу [такое заключение можно сделать, сравнив ответ для B_1 с формулой (2) задачи № 15-2]. Следовательно, ток, идущий по трубке кабеля (тонкостенному длинному цилиндру), не создает внутри нее магнитного поля. 3. Отсутствие результирующего поля вне кабеля свидетельствует о численном равенстве (и противоположном направлении) магнитных индукций токов трубки и осевого провода. Другими словами, магнитное поле тока, идущего по длинному цилиндру, для точек, лежащих вне цилиндра, можно рассчитывать, заменив цилиндр линейным проводником, расположенным вдоль оси цилиндра.

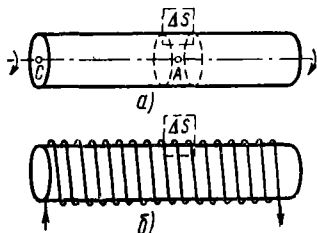


Рис. 15-5

15-4. Длинный цилиндр из диэлектрика, по поверхности которого равномерно распределен положительный заряд с линейной плотностью $\tau = 10,0$ мкКл/м, вращается вокруг своей оси, совершая $n_0 = 1,00 \times 10^2$ об/с. Определить индукцию магнитного поля в двух точках: в середине оси цилиндра и в центре одного из его оснований.

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что круговое движение электрических зарядов при вращении данного цилиндра соответствует току, проходящему по виткам соленоида, имеющего такие же размеры, что и цилиндр. Следовательно, магнитное поле данного вращающегося цилиндра эквивалентно магнитному полю длинного соленоида с током. Поэтому индукцию магнитного поля в середине цилиндра вычислим по формуле (15.8).

Чтобы выразить произведение nI через заданные в условии величины n_0 , τ , рассмотрим прямоугольную площадку ΔS , сторона которой, параллельная оси цилиндра, имеет единичную длину (рис. 15-5, а). За каждый оборот цилиндра через эту площадку проходит весь заряд, расположенный на поверхности цилиндра единичной длины, т. е. заряд, численно равный величине τ . Следовательно, через площадку ΔS за промежуток времени Δt пройдет заряд, численно равный

$$q' = n_0 \tau \Delta t. \quad (1)$$

В случае соленоида через такую же площадку $\Delta S'$ (рис. 15-5, б) за промежуток времени Δt пройдет заряд, численно равный

$$q'' = nI \Delta t. \quad (2)$$

Магнитные поля токов соленоида и вращающегося цилиндра эквивалентны при условии $q'' = q'$. Приравнивая правые части формул (1), (2), получаем

$$nI = n_0 \tau.$$

Подставив это значение nI в формулу (15.8), найдем индукцию магнитного поля в середине вращающегося цилиндра:

$$B_A = \mu_0 n_0 \tau. \quad (3)$$

Чтобы определить магнитную индукцию в центре одного из оснований цилиндра, учтем, что в задаче идет речь о *длинном* цилиндре, длина которого значительно превышает его диаметр. Если мысленно разделить цилиндр пополам плоскостью, перпендикулярной оси вращения, и удалить одну половину, например правую, то индукция в точке A уменьшится вдвое и станет равной

$$B'_A = \mu_0 n_0 \tau / 2.$$

Это вытекает из принципа суперпозиции полей, в силу которого каждая половина вращающегося цилиндра вносит одинаковый вклад в магнитное поле в точке A . В то же время индукция B_C в точке C (рис. 15-5, а) не изменится при удалении правой половины цилиндра, так как при большой длине левой половины цилиндра вклад, вносимый в магнитное поле в точке C правой половиной, был пренебрежимо мал. Но из соображений симметрии следует, что магнитные поля у концов оставшейся половины должны быть одинаковыми. Таким образом, получаем

$$B_C = B'_A = \mu_0 n_0 \tau / 2. \quad (4)$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ, в формулы (3) и (4), произведем вычисление:

$$B_A = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 1,00 \cdot 10^{-5} \text{ Т} = 12,6 \cdot 10^{-10} \text{ Т},$$

$$B_C = (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 1,00 \cdot 10^{-5}/2) \text{ Т} = 6,3 \cdot 10^{-10} \text{ Т}.$$

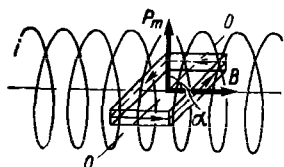


Рис 15 6

15-5. В центре длинного соленоида, имеющего $n = 5000$ витков на метр, помещена рамка, состоящая из $N = 50$ витков провода площадью $S = 4,0 \text{ см}^2$ каждый. Рамка может вращаться вокруг оси OO' , перпендикулярной оси соленоида, и удерживается в равновесии спиральной пружиной так, что при этом ее плоскость параллельна оси соленоида (рис 15-6). При пропускании тока по рамке и соленоиду, соединенных последовательно, рамка повернулась на угол $\varphi = 60^\circ$. Определить силу тока, если жесткость пружины $k = 6,00 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$. (Жесткость спиральной пружины измеряется вращающим моментом, необходимым для закручивания пружины на угол $\alpha = 1 \text{ рад}$)

Решение. При появлении тока рамка оказывается в однородном магнитном поле соленоида. На нее будет действовать вращающий момент \mathbf{M} , под действием которого рамка повернется, закручивая пружину. Рамка установится в таком положении, когда момент магнитных сил \mathbf{M} уравновесится моментом упругих сил $\mathbf{M}_{\text{упр}}$ пружины, т. е.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{упр}}. \quad (1)$$

Момент \mathbf{M} найдем по формуле (15.10), которую запишем в скалярной форме:

$$M = p_m B \sin(\widehat{p_m, \mathbf{B}}), \quad (2)$$

где p_m, B выражаются формулами (15.9), (15.8). Учитывая, что в (15.9) дан магнитный момент *одного* витка, на основании соотношения (2) получим

$$M = NIS\mu_0 nI \sin(\widehat{p_m, \mathbf{B}}) = \mu_0 nNI^2 S \sin \alpha, \quad (3)$$

где α — угол между векторами p_m, \mathbf{B} . Заметим, что вначале, когда тока нет, $\alpha = \pi/2$.

При устойчивом равновесии свободной рамки вектор p_m всегда параллелен вектору \mathbf{B} и при этом $\alpha = 0$. Поэтому под действием момента магнитных сил M рамка поворачивается так, что угол α уменьшается. Пусть рамка повернулась на угол φ . Возникающий при этом момент упругих сил $M_{\text{упр}}$ пружины согласно закону Гука равен

$$M_{\text{упр}} = k\varphi, \quad (4)$$

где k — жесткость пружины. Приравняв на основании (1) правые части формул (3), (4) и учитывая, что $\alpha = \pi/2 - \varphi$, получим

$$\mu_0 n N I^2 S \cos \varphi = k \varphi,$$

откуда

$$I = \sqrt{k \varphi / \mu_0 n N S \cos \varphi}.$$

Выразив все величины в единицах СИ, произведем вычисление:

$$I = \sqrt{\frac{6,00 \cdot 10^{-6} \cdot \pi / 3}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 4,0 \cdot 10^{-4} \cdot 0,50}} \text{ А} = 1,0 \text{ А}.$$

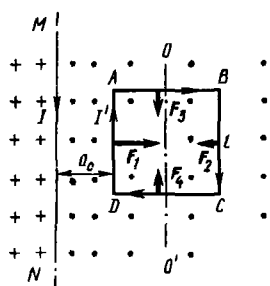


Рис 15-7

15-6. Рядом с длинным прямым проводом MN , по которому идет ток силой I , расположена квадратная рамка со стороной l , обтекаемая током силой I' . Рамка лежит в одной плоскости с проводом MN так, что ее сторона, ближайшая к проводу, находится от него на расстоянии a_0 (рис. 15-7). Определить магнитную силу, действующую на рамку, а также работу этой силы при удалении рамки из магнитного поля. Считать, что при движении рамки токи I, I' поддерживаются постоянными,

Решение. Здесь в отличие от предыдущей задачи рамка с током находится в *неоднородном* магнитном поле, так как магнитная индукция \mathbf{B} убывает при удалении от провода MN . В этом случае на контур кроме вращающего момента действует сила. Перемещая контур, эта сила совершает работу.

Возможны два способа решения задачи, отличающиеся последовательностью нахождения неизвестных величин — силы и работы. Рассмотрим оба способа.

1. На каждый элемент длины контура $ABCD$, расположенного в магнитном поле тока I , действует сила Ампера, выражаемая формулой (15.1). Направление этой силы зависит, в частности, от направления вектора магнитной индукции \mathbf{B} в том месте, где находится этот элемент. Направления линий индукции, определяемые правилом правого винта, изображены на рисунке крестиками (от наблюдателя) и точками (к наблюдателю). Применяв правило левой руки, найдем направления сил, действующих на все стороны рамки. Так как стороны AB, DC расположены одинаково относительно провода MN , действующие на них силы $\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ должны быть численно равны. Будучи противоположно направленными, они уравниваются. Следовательно, равнодействующая всех сил, приложенных к рамке, равна

$$F = F_1 - F_2 \quad (1)$$

и направлена в сторону от провода.

Вычислим силы F_1, F_2 , действующие на стороны рамки AD, BC . Для этого перепишем формулу (15,1) для силы Ампера в скалярной форме:

$$dF_A = I' dl B \sin(\widehat{dl, \mathbf{B}}). \quad (2)$$

Учтем, что для всех элементов dl одной и той же стороны рамки $\sin(\widehat{dl, \mathbf{B}}) = 1$ и величина B одинакова. Поэтому силу, действующую на каждую из сторон AD, BC , на основании (2) выразим так:

$$F_A = \int_0^l I' B dl = I' B \int_0^l dl = I' Bl. \quad (3)$$

Магнитная индукция длинного прямого провода с током дается формулой (15.5), если в ней положить $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}. \quad (4)$$

Подставив это значение B в (3), найдем

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II' l}{a}. \quad (5)$$

Выразив в соотношении (1) каждую из сил F_1, F_2 по формуле (5), определим результирующую силу:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} II' l \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0 + l} \right). \quad (6)$$

При удалении рамки от провода за пределы магнитного поля тока I силы F_1, F_2 , которые теперь будем рассматривать как переменные величины, совершат работу: сила F_1 — положительную работу A_1 , сила F_2 — отрицательную работу A_2 . Считая каждую из величин A_1, A_2 работой переменной силы, найдем полную работу, совершенную при этом магнитными силами:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{a_0}^{\infty} F_1 da - \int_{a_0 + l}^{\infty} F_2 da. \quad (7)$$

Чтобы вычислить каждый из этих интегралов, надо знать, как зависит сила от расстояния до провода MN . Формула (5) дает эту зависимость, однако она верна лишь для *длинного* провода. При значительном удалении от провода условия $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ перестают выполняться и формула (5) оказывается неверной. Однако найти разность интегралов, стоящую в формуле (7), можно. Для этого воспользуемся тем, что сила F_1 , переместив проводник AD на расстояние l , в дальнейшем совершит точно такую же по абсолютному значению работу, что и сила F_2 , перемещающая проводник BC , так как проводник AD , пройдя путь l , затем в точности повторит движение проводника BC . Имея противоположные знаки, эти два значения работы дают в сумме нуль.

Следовательно, искомая работа A равна работе силы F_1 при перемещении проводника AD из его начального положения на расстояние l . Поэтому, учитывая формулу (5), получим

$$A = \int_{a_0}^{a_0+l} F_1 da = \frac{\mu_0}{2\pi} I I' l \int_{a_0}^{a_0+l} \frac{da}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I' l \ln \frac{a_0+l}{a_0}.$$

2. Для вычисления работы по удалению рамки $ABCD$ из магнитного поля воспользуемся формулой (15.12), выражающей работу магнитных сил через изменение магнитного потока $\Phi - \Phi_0$ сквозь замкнутый контур, где Φ_0 — магнитный поток сквозь рамку в ее начальном положении. Очевидно, магнитный поток Φ сквозь рамку, находящуюся вне магнитного поля, равен нулю. Таким образом, работа сил магнитного поля

$$A = (\Phi - \Phi_0) I' = -\Phi_0 I', \quad (8)$$

Найдем поток Φ_0 по формуле (15.11). Так как положительное направление нормали к контуру с током связано с направлением тока правилом правого винта, то нормаль к контуру $ABCD$ направлена от наблюдателя. Следовательно, для всех элементов dS поверхности, ограниченной контуром, вектор \mathbf{B} составляет с нормалью угол π , поэтому $B_n = -B$, поток Φ_0 , определяемый формулой (15.11), является отрицательным, а работа A , выражаемая формулой (8), — положительной.

Чтобы вычислить величину Φ_0 , разобьем поверхность, ограниченную контуром $ABCD$, на элементарные полоски, параллельные проводу MN , длиной l и шириной da . Магнитный поток сквозь такую полоску, расположенную от провода MN на расстоянии a , равен с учетом формулы (4)

$$d\Phi = B_n dS = -B l da = -\frac{\mu_0}{2\pi} I l \frac{da}{a}.$$

Тогда поток сквозь весь контур $ABCD$

$$\Phi_0 = \int_S B_n dS = -\frac{\mu_0}{2\pi} I l \int_{a_0}^{a_0+l} \frac{da}{a} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I l \ln \frac{a_0+l}{a_0}. \quad (9)$$

Подставив это значение Φ_0 в формулу (8), получим

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi} I I' l \ln \frac{a_0+l}{a_0}.$$

Для отыскания силы, действующей на рамку, предположим, что рамка под влиянием этой силы переместилась из своего начального положения, причем ее расстояние от провода возросло на малую величину Δa . При этом сила F совершит работу

$$\Delta A = F \Delta a,$$

С другой стороны, согласно формуле (15.12) эту работу можно выразить через изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ сквозь рамку при ее перемещении на Δa :

$$\Delta A = I' \Delta\Phi.$$

Из двух последних равенств, переходя к пределу, получаем

$$F = I' \frac{d\Phi}{da}. \quad (10)$$

Чтобы выполнить дифференцирование, выразим Φ как функцию переменной величины a — расстояние от провода MN до стороны рамки AD . Для этого запишем формулу (9) в виде

$$\Phi = -\frac{\mu_0}{2\pi} I l \ln \frac{a+l}{a}.$$

Подставим это значение Φ в (10) и произведем дифференцирование:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} I I' l \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right).$$

При $a = a_0$ этот результат совпадает с формулой (6).

З а м е ч а н и я: 1. В данной задаче оба рассмотренных метода оказались одинаково целесообразными, однако второй метод более универсален. Действительно, вычисление работы первым способом было основано на предположении, что рамка с током, удаляясь от провода MN , двигалась поступательно, оставаясь все время в одной и той же плоскости, а вычисление работы вторым способом остается верным для любого движения рамки. Как это следует из формулы (15.12), важны лишь начальное и конечное положения контура. Кроме того, второй метод более удобен, поскольку он позволяет не рассматривать силы, действующие на отдельные элементы контура. Как видно из формулы (10), достаточно вычислить производную от магнитного потока по перемещению контура в каком-либо направлении, чтобы узнать силу, действующую в этом направлении на контур.

2. При удалении рамки от провода MN магнитный поток сквозь нее возрастал, поскольку начальный поток $\Phi_0 < 0$, и, согласно (15.12), силы поля, перемещая рамку, совершали положительную работу. Однако магнитные силы выталкивают рамку с током из поля провода MN лишь до тех пор, пока сохраняется первоначальная ориентация рамки относительно провода. Если же представить, что рамка повернулась вокруг оси OO' (рис. 15-7) на небольшой угол, то силы F_1 , F_2 уже не будут лежать на одной прямой. Они создадут вращающий момент, в результате чего рамка повернется на угол π (при этом магнитный поток сквозь рамку станет положительным). Таким образом, рамка, удерживаемая осью OO' в положении, изображенном на рисунке, находится в неустойчивом равновесии. Поэтому в действительности рамка $ABCD$, если она свободная, сначала повернется вокруг оси OO' на угол π , а затем начнет притягиваться к проводнику MN . Последнее легко понять, если определить направления сил, которые теперь будут действовать на стороны рамки AD , BC . Это следует также из формулы

(10): теперь магнитный поток сквозь рамку положителен. Следовательно, он возрастает ($d\Phi > 0$) при приближении рамки к проводу ($da < 0$). Значит, производная $d\Phi/da$, а с ней и сила F — величины отрицательные, что соответствует притяжению рамки к проводу MN .

Во всех случаях рамка с током перемещается под действием силы F так, что при этом магнитный поток сквозь нее возрастает.

§ 16. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Основные формулы

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея): при всяком изменении магнитного потока сквозь контур в нем возникает электродвижущая сила индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока, т. е.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (16.1)$$

Количество электричества, протекающего по контуру сопротивлением R при изменении магнитного потока сквозь контур на величину $\Delta\Phi$,

$$q = - \frac{\Delta\Phi}{R}. \quad (16.2)$$

Магнитный поток сквозь контур и сила тока в нем связаны соотношением

$$\Phi = LI, \quad (16.3)$$

где L — индуктивность контура.

Индуктивность длинного соленоида с немагнитным сердечником

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 V, \quad (16.4)$$

где $n = N/l$ — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, S — площадь его поперечного сечения, V — его объем.

Сила тока в цепи, обладающей постоянными сопротивлением R и индуктивностью L и содержащей постоянную э. д. с. \mathcal{E} , изменяется при замыкании и размыкании цепи по закону

$$I = I_0 e^{-Rt/L} + \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}). \quad (16.5)$$

При замыкании цепи начальная сила тока $I_0 = 0$; при размыкании $\mathcal{E} = 0$.

Методические указания

1. В явлениях электромагнитной индукции магнитный поток сквозь контур может изменяться как при движении контура или отдельных его участков, так и при изменении во времени магнитного поля. В обоих случаях для определения э. д. с. индукции пользуются законом Фарадея (16.1). Однако при движении проводников в магнитном поле этот закон применим лишь в тех случаях, когда рассматриваемый контур проходит через *одни и те же* точки движущегося проводника. Например, в случае на рис. 15-7 контур $abcd$ проходит внутри материа-