

ограниченная в процессе самоиндукции величиной $I_{\text{пред}}$, не достигает значения, необходимого для равновесия сил mg и F_A , приложенных к перемычке, ни при каких конечных значениях ее скорости. Другими словами, скорость перемычки неограниченно возрастает и ее устанавливающееся значение недостижимо.

2. Если $R \rightarrow \infty$, то $v \rightarrow \infty$. В этом случае ток по контуру не идет и перемычка падает под действием силы тяжести в ускорении g .

3. Если $R = 0$ и выполняется условие (9), то $v = 0$: перемычка будет неподвижно висеть в магнитном поле, несмотря на действие силы тяжести. Этот парадоксальный результат можно осуществить, если охладить проводники контура $abcd$, помещенного в достаточно сильное магнитное поле, до сверхпроводящего состояния.

§ 17. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Основные формулы

Намагниченность (вектор намагничения) J измеряется магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$J = \frac{l}{\Delta V} \sum_{i=1}^N p_m, i, \quad (17.1)$$

где N — число частиц, содержащихся в физически бесконечно малом объеме ΔV ; p_m, i — магнитный момент i -й частицы.

Вектором напряженности H магнитного поля называется линейная комбинация векторов B , J :

$$H = B/\mu_0 - J. \quad (17.2)$$

Векторы магнитной индукции B и напряженности H связаны соотношением

$$B = \mu_0 \mu H, \quad (17.3)$$

где μ — магнитная проницаемость среды (для вакуума $\mu = 1$).

Циркуляция вектора напряженности H вдоль замкнутого контура L равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром:

$$\oint_L (H dl) = \oint_L H dl \cos(H, \hat{dl}) = \Sigma I. \quad (17.4)$$

Магнитная индукция внутри длинного соленоида с магнитным сердечником

$$B = \mu_0 \mu n l \quad (17.5)$$

где n — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, l — сила тока, протекающего по нему, μ — магнитная проницаемость вещества сердечника.

Индуктивность длинного соленоида объемом V с магнитным сердечником

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (17.6)$$

Энергия магнитного поля тока I в контуре, обладающем индуктивностью L ,

$$W = L I^2 / 2. \quad (17.7)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия, отнесенная к единице объема)

$$\omega = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (17.8)$$

Методические указания

1. Расчеты магнитных полей при наличии магнитных сред значительно упрощаются введением вектора напряженности \mathbf{H} как характеристики магнитного поля, определяемой через векторы \mathbf{B} , \mathbf{J} соотношением (17.2). Особенность вектора \mathbf{H} состоит в том, что его циркуляция по любому замкнутому контуру равна, согласно формуле (17.4), алгебраической сумме токов, охваченных этим контуром. Другими словами, циркуляция вектора \mathbf{H} не зависит от магнитных свойств среды, через которую проходит выбранный контур. Поэтому соотношение (17.4) широко применяют для расчета магнитных цепей, выбирая контуром интегрирования одну из замкнутых линий индукции, идущих вдоль магнитной цепи

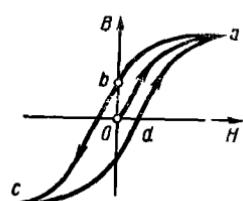


Рис. 17-1

Однако сам вектор \mathbf{H} в отличие от его циркуляции зависит от магнитных свойств среды. Например, напряженность магнитного поля как в воздушном зазоре между полюсами электромагнита, так и внутри его железного сердечника зависит не только от силы тока в обмотке электромагнита, но и от магнитных свойств железа. (Это видно из решения задачи № 17-3.

См. также замечание к задаче.) Лишь в двух случаях — когда сердечник электромагнита является сплошным кольцом (тором) или бесконечно длинным стержнем — вектор \mathbf{H} не зависит от магнитных свойств среды и определяется только током в обмотке (см. задачи № 17-1, 17-2).

2. Чтобы решить уравнение, полученное в результате применения теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} , часто бывает необходимо знать связь между векторами \mathbf{H} , \mathbf{B} [кроме той, что выражена формулой (17.2)]. Эта связь устанавливается соотношением (17.3): $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$. Однако отсюда не следует пропорциональной зависимости между векторами \mathbf{B} , \mathbf{H} в ферромагнетике. Магнитная проницаемость μ ферромагнетика сама зависит от магнитного поля внутри вещества, являясь переменной величиной. Таким образом, между векторами \mathbf{B} , \mathbf{H} существует нелинейная зависимость, различная для разных ферромагнетиков. В справочниках эта зависимость дается в виде полученных экспериментально кривых намагничивания железа и других ферромагнетиков.

Вследствие явления магнитного гистерезиса кривая намагничивания ферромагнетика (линия Oa на рис. 17-1) не совпадает с кривой его размагничивания (линия abc). Поэтому для отыскания связи между векторами \mathbf{B} , \mathbf{H} в ферромагнетике пользуются кривой намагничивания только в тех случаях, когда известно, что рассматриваемое в задаче состояние ферромагнетика возникло в процессе его намагничивания. При этом необходимо, чтобы в начале этого процесса ферромагнетик не имел остаточной намагченности, иначе кривая намагничивания не будет проходить через точку O^* и, следовательно, не совпадет с основной кривой намагничивания Oa , приводимой в справочниках.

* Это следует из соотношения (17.2): если намагченность $J \neq 0$, то не могут одновременно выполняться равенства $H = 0$, $B = 0$.

Решение задач

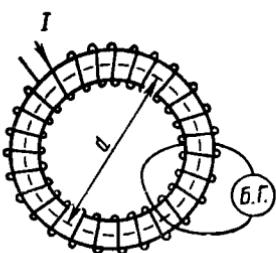


Рис. 17-2

17-1. На стальном ненамагнченном кольце (торе), средний диаметр которого $d = 30$ см и площадь поперечного сечения $S = 1,6$ см², имеется обмотка, содержащая $N = 800$ витков (рис. 17-2). Когда по обмотке пустили ток силой $I = 1,80$ А, баллистический гальванометр Б.Г. дал отброс, соответствующий заряду, прошедшему через прибор, $q = 0,24$ мКл. Зная, что сопротивление цепи гальванометра $R = 0,80$ Ом, определить напряженность поля H и магнитную индукцию B внутри кольца, намагнченность кольца, а также магнитную проницаемость стали при заданном токе в обмотке. Считать зависимость B от H для данного сорта стали неизвестной.

Решение. Когда по обмотке тороида пойдет ток, в стальном кольце возникнет магнитное поле, замкнутые линии индукции которого будут проходить вдоль кольца. Это поле явится результатом наложения двух полей: тока и теперь уже намагнченного материала кольца. Однако напряженность H магнитного поля внутри кольца зависит только от тока в обмотке тороида. Действительно, применив теорему о циркуляции вектора H (17.4), где в качестве контура интегрирования возьмем среднюю длину окружности кольца $l = \pi d$, и учитывая, что в силу соображений симметрии во всех точках этого контура должно быть

$$H = \text{const}, \quad (1)$$

получим

$$Hl = NI,$$

откуда

$$H = NI/l = NI/\pi d. \quad (2)$$

Из формулы видно, что H зависит от d , а поэтому будет различной в различных точках одного и того же тороида, расположенных на различных расстояниях от центра. Однако, учитывая числовые значения величин d , S , видим, что относительное различие между наружным и внутренним диаметрами кольца мало, поэтому приближенно можно считать, что формула (2) выражает величину H для всех точек кольца.

Соотношение (2) можно также получить на основании формул (17.5) и (17.3), рассматривая тороид как длинный соленоид, согнутый в кольцо.

Чтобы вычислить магнитную индукцию, воспользуемся простой в данном случае связью между величиной B и магнитным потоком Φ внутри тороида:

$$\Phi = BS. \quad (3)$$

При включении тока магнитный поток в тороиде возрос от нуля до значения, равного Φ , что привело к появлению индукционного тока в контуре баллистического гальванометра, сцепленном с магнитным потоком. Заряд q , прошедший по этому контуру, определяется соотношением (16.2), откуда (опуская знак « \rightarrow ») имеем

$$\Delta\Phi = \Phi = qR. \quad (4)$$

Из формул (3), (4) следует, что

$$B = qR/S. \quad (5)$$

Теперь, зная величины B , H , легко ответить на остальные вопросы задачи. Из соотношений (17.2), (17.3) с учетом (1), (4) получим:

$$J = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{qR}{\mu_0 S} - \frac{NI}{\pi d}; \quad (6)$$

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{qR\pi d}{\mu_0 SNI}. \quad (7)$$

Выразим в единицах СИ данные величины: $d = 0,30$ м, $S = 1,6 \cdot 10^{-4}$ м², $N = 800$, $I = 1,80$ А, $q = 2,4 \cdot 10^{-4}$ Кл, $R = 0,80$ Ом. Подставив эти значения в формулы (2), (5)–(7) и выполнив вычисление, найдем:

$$H = 1,5 \cdot 10^3 \text{ А/м}; \quad B = 1,2 \text{ Т}; \quad J = 1,0 \cdot 10^6 \text{ А/м}, \quad \mu = 6 \cdot 10^4.$$

17-2. При выключении тока в обмотке тороида в цепи, схема которой изображена на рис. 17-2, через баллистический гальванометр прошел заряд $q' = 80$ мкКл. Используя условие предыдущей задачи, определить остаточную намагниченность J' стального кольца, а также остаточную индукцию и напряженность поля внутри кольца после исчезновения тока в обмотке.

Решение. Неизвестные величины будем находить в той же последовательности, что и в предыдущей задаче. Повторив приведенные там рассуждения, снова придем к соотношению (2). Но теперь $I = 0$. Следовательно,

$$H = NI/\pi d = 0.$$

Чтобы определить остаточную индукцию B' внутри кольца, напишем уравнение (16.2) для заряда q' , перемещенного индукционным током по контуру баллистического гальванометра при выключении тока в обмотке:

$$q' = \frac{\Phi - \Phi'}{R} = \frac{BS - B'S}{R},$$

где Φ , Φ' — магнитный поток в кольце соответственно до и после исчезновения тока в обмотке тороида. Отсюда

$$B - B' = q'R/S.$$

Подставив сюда вместо B его значение по формуле (5) предыдущей задачи, получим

$$B' = (q - q') R/S. \quad (1)$$

Наконец, из соотношения (17.2) с учетом, что $H = 0$, определим остаточную намагниченность кольца:

$$J' = \frac{B'}{\mu_0} = \frac{(q - q') R}{\mu_0 S}. \quad (2)$$

Подставив в формулы (1) и (2) числовые значения величин, выраженные в единицах СИ, и выполнив вычисление, найдем:

$$B' = 0,8 \text{ Т}; \quad J' = 6 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

З а м е ч а н и е. Решив задачу, мы получили парадоксальный результат: напряженность магнитного поля внутри *намагниченного* кольца равна нулю! Этот результат является следствием того, что напряженность магнитного поля в кольце пропорциональна силе тока в обмотке и не зависит от магнитных свойств материала кольца [см. формулу (2) задачи № 17-1]. Такой же результат получился бы, если вместо кольца взять *длинный* стержень, вставленный внутрь *длинного* соленоида (см. текст петитом в предыдущей задаче). Однако на все остальные случаи этот результат не распространяется. Например, внутри намагниченного кольца с *воздушным зазором* $H \neq 0$ даже при отсутствии тока в обмотке (см. задача № 17-4).

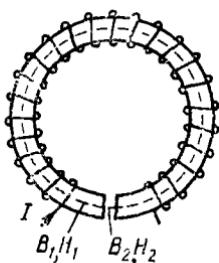


Рис. 17-3

17-3. Тороид с железным ненамагниченным сердечником, длина которого по средней линии $l_1 = 1,00 \text{ м}$, имеет воздушный зазор $l_2 = 3,0 \text{ мм}$ (рис. 17-3). По обмотке тороида, содержащей $N = 1300$ витков, пустили ток, в результате чего индукция в зазоре стала $B_2 = 1,00 \text{ Т}$. Определить силу тока.

Р е ш е н и е. Поскольку в задаче идет речь о магнитной цепи, применим теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} , выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию тороида L . Эта задача отличается от предыдущих тем, что здесь из-за воздушного зазора условие (1) задачи № 17-1 выполняется уже не для всех точек контура L . В этом можно убедиться, сравнив магнитные индукции в железе B_1 и воздухе B_2 и учитывая, что линии вектора \mathbf{B} всегда замкнуты. Так как воздушный зазор в тороиде узкий, то рассеянием линий индукции можно пренебречь. Следовательно, линии индукции будут проходить так же, как и в сплошном торе, который уже рассматривался. Поэтому через любое поперечное сечение нашего тороида, в том числе и через сечение, взятое в воздушном зазоре, проходит один и тот же магнитный

поток Φ . А так как и площадь любого сечения S одна и та же, то однаковы и магнитные индукции в любой точке контура L :

$$B_1 = B_2 = B = \Phi/S = 1,00 \text{ Т.} \quad (1)$$

Поскольку магнитные индукции в железе и воздушном зазоре одинаковы, а магнитные проницаемости этих веществ разные, то напряженности магнитного поля в железе и зазоре различны [см. формулу (17.3)]. Поэтому, применив теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} к контуру L , запишем

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI, \quad (2)$$

где H_1, H_2 — напряженности магнитного поля в железе и зазоре.

Так как для воздуха $\mu = 1$, то из (17.3) имеем

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{1,00}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 8,0 \cdot 10^5 \text{ А/м.} \quad (3)$$

Величину H_1 найдем по графику намагничивания, выражающему зависимость между величинами B , H в железе (этот график приводится в задачниках и справочниках по физике):

$$H_1 = 200 \text{ А/м.}$$

Теперь из уравнения (2) получим для силы тока

$$I = (H_1 l_1 + H_2 l_2)/N = 2,0 \text{ А.}$$

З а м е ч а н и е. Допустим, что имеется обратная задача, в которой дана сила тока I , но требуется определить магнитную индукцию в зазоре B_2 (или в железе B_1 , что то же самое). Оказывается, такая задача решается несколько иным путем. Теперь, не зная ни одной из характеристик магнитного поля ни в воздушном зазоре, ни в железе, мы лишены возможности применить график намагничивания железа. Однако воспользоваться зависимостью

$$B_1 = f(H_1), \quad (4)$$

выражаемой этим графиком, все-таки можно. Для этого надо уравнение (2) переписать с учетом соотношений (1), (3) так, чтобы оно также выражало зависимость между величинами B_1 и H_1 :

$$H_1 l_1 + B l_2 / \mu_0 = NI. \quad (5)$$

Если бы зависимость (4) была задана уравнением, достаточно было бы алгебраически решить систему уравнений (4), (5) относительно неизвестных B_1, H_1 . Но зависимость (4) задана графиком. Следовательно, надо применить графический метод решения системы двух уравнений. На графике функции $B_1 = f(H_1)$ строят прямую (5). Координаты точки пересечения двух линий укажут искомые величины B_1, H_1 .

17-4. После выключения тока в обмотке тороида из предыдущей задачи остаточная индукция в зазоре стала $B = 4,2$ мТ. Определить остаточную намагниченность J сердечника, а также напряженность H_1 поля в железе.

Решение. Было бы ошибкой воспользоваться для отыскания величины H_1 кривой намагничивания железа, как это было сделано в предыдущей задаче. Состояние железа, в котором оно рассматривается в данной задаче, возникло в результате неполного размагничивания железа. Однако вследствие явления магнитного гистерезиса кривые намагничивания и размагничивания железа не совпадают (см. рис. 17-1).

Единственно правильный путь решения задачи состоит в применении теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} . Повторив рассуждения, приведенные в задаче № 17-3, снова получим соотношения (1), (2). Но теперь $I = 0$, поэтому

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0. \quad (1)$$

По-прежнему величины H_2 , B в воздушном зазоре связаны соотношением (17.3), где $\mu = 1$. Отсюда

$$H_2 = B/\mu_0.$$

Подставив это значение H_2 в (1), получим напряженность магнитного поля в железе:

$$H_1 = -H_2 \frac{l_2}{l_1} = -\frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{l_2}{l_1}. \quad (2)$$

Знак «—» в формуле показывает, что векторы \mathbf{H} , \mathbf{B} в намагниченном железе при отсутствии тока в обмотке направлены противоположно (соответствующие участки петли гистерезиса на рис. 17-1 лежат во второй и четвертой четвертях).

Из соотношения (17.2) определим остаточную намагниченность железа:

$$J = B/\mu_0 - H_1,$$

или, учитывая противоположные направления \mathbf{B} , \mathbf{H}_1 , запишем в скалярной форме

$$J = B/\mu_0 + H_1.$$

Подставив вместо H_1 его абсолютное значение из формулы (2), найдем,

$$J = \frac{B(l_1 + l_2)}{\mu_0 l_1}. \quad (3)$$

Подставив в формулы (2), (3) числовые значения величин (предварительно выразив B в теслах) и выполнив вычисление, получим:

$$H_1 = -10 \text{ A/m}, J = 3,4 \cdot 10^8 \text{ A/m}.$$

17-5. По обмотке тороида с ненамагниченным железным сердечником пустили ток силой 0,60 А. Витки провода диаметром $d = 0,40$ мм с весьма тонкой изоляцией плотно прилегают друг к другу. Определить индуктивность тороида при данных условиях, а также энергию магнитного поля в сердечнике, если площадь его сечения $S = 4,0$ см², а диаметр средней линии $D = 30,0$ см.

Решение. Учитывая числовые значения S, D , видим, что длина средней линии тороида значительно превышает диаметр его витков. Поэтому индуктивность можно рассчитать по формуле (17.6), рассматривая данный тороид как длинный соленоид, согнутый в кольцо. Тогда, используя геометрические соотношения $V = \pi D S$, $n = 1/d$, получим

$$L = \mu_0 \mu n^2 V = \mu_0 \mu \pi D S / d^2. \quad (1)$$

Так как $\mu_0 \mu = B/H$, найдем величины H , B , характеризующие магнитное поле в сердечнике. Напряженность магнитного поля внутри тороида уже была вычислена [см. формулу (2) задачи № 17-1]. В данном случае

$$H = (N/l) I = nI = I/d = 1,5 \cdot 10^9 \text{ А/м}. \quad (2)$$

По кривой намагничивания железа находим магнитную индукцию в сердечнике:

$$B = 1,35 \text{ Т}.$$

Теперь, поскольку величины B и H уже известны, запишем первый ответ на основании (1):

$$L = \frac{\pi D S B}{d^2 H}. \quad (3)$$

Зная индуктивность тороида и силу тока в обмотке, по формуле (17.7) найдем с учетом формул (3), (2) энергию магнитного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\pi D S I^2}{2d^2 H} = \frac{\pi I D S B H}{2}. \quad (4)$$

Такой же результат можно получить, применив формулу (17.8) для объемной плотности энергии магнитного поля:

$$W = wV = \frac{BH}{2} \pi D S.$$

Подставляя в формулы (3), (4) числовые значения всех величин, выраженные в единицах СИ, получим:

$$L = 2,1 \text{ Г}; \quad W = 0,4 \text{ Дж}.$$