§ 18. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Основные формулы

Сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся в электрическом и магнитном полях,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\,[\mathbf{vB}], \tag{18.1}$$

где q — заряд частицы, $\mathbf{v}$ — ее скорость, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция.

Зависимость массы движущейся частицы от ее скорости v:

$$m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{18.2}$$

Здесь m_0 — масса покоящейся частицы, $\beta = v/c$, где $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Полная энергия частицы массой m равна

$$W = mc^2 \tag{18.3}$$

(здесь исключена потенциальная энергия во внешнем силовом поле).

Общие замечания. Частица называется *классической*, если ее скорость пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света ($v \ll c$). В противном случае частица называется *релятивистской*. Движение классической частицы описывается уравнениями классической механики (гл. 1). Для релятивистских частиц необходимо учитывать соотношения теории относительности: зависимость массы от скорости (18.2), связь между массой и полной энергией частицы (18.3).

Из-за методических соображений материал настоящего параграфа разбит на два раздела: в первом рассматривается движение классических частиц, во втором — релятивистских. Нередко при решении задач приходится самостоятельно выяснять вопрос о том, классической или релятивистской следует считать данную частицу. Если при этом известной величиной является не скорость частицы, а ее импульс (количество движения) p или кинетическая энергия T, то надо иметь в виду следующее. Частицу считают классической только в том случае, если $p \ll m_0c$ или $T \ll m_0c^2$. Полезно запомнить, что для электрона $m_0c^2 = 0{,}511$ МэВ.

А. ДВИЖЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Методические указания

1. Задачи на движение классических заряженных частиц ($v \ll c$) в электрическом и магнитном полях по существу решаются методами, рассмотренными в гл. 1 «Механика». Различие лишь в природе сил, действующих на частицу. Если в механике движение частиц происходит под действием гравитационных сил, упругих сил и сил трения, то здесь заряженные частицы движутся лишь под действием силы

$\mathbf{F}$, определяемой по (18.1) и состоящей из двух частей: электрической силы $\mathbf{F}_{эл} = q\mathbf{E}$ и магнитной (лоренцовой) силы $\mathbf{F}_м = q\,[\mathbf{vB}]$*.

2. Для решения задачи, как правило, необходимо записать уравнение движения частицы — второй закон Ньютона. Чтобы перейти от векторной формы записи второго закона (2.1) к скалярной, надо определить направления векторов $\mathbf{F}_{эл}$, $\mathbf{F}_м$. Учтем, что в формуле (18.1) q — алгебраическая величина. В частности, для электрона $q < 0$, поэтому векторы $\mathbf{F}_{эл}$, $\mathbf{E}$ направлены противоположно. Магнитная сила $\mathbf{F}_м$, как это следует из (18.1), всегда перпендикулярна векторам $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$. Поэтому она сообщает движущейся заряженной частице только нормальное ускорение, не изменяя ее скорости и, следовательно, не совершая работы. Наоборот, сила $\mathbf{F}_{эл}$ при перемещении частицы всегда (за исключением случаев, когда $\mathbf{v} \perp \mathbf{E}$) совершает работу, равную, согласно формуле (11.3), изменению кинетической энергии частицы.

Решение задач

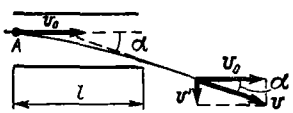

Рис 18 1

18-1. Пучок электронов влетает со скоростью $v_0 = 3{,}0 \cdot 10^6$ м/с в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам длиной $l = 5{,}00 \cdot 10^{-2}$ м (рис. 18-1). Напряженность электрического поля конденсатора $E = 200$ В/м Определить угол отклонения пучка в результате его прохождения через конденсатор

Решение. На каждый электрон, обладающий зарядом e, во время его движения в электрическом поле конденсатора действует, согласно (18.1), постоянная сила $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, направленная вдоль силовых линий (т. е. по вертикали**) и сообщающая электрону ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{e\mathbf{E}}{m} \qquad (1)$$

в ту же сторону. Поэтому, имея начальную горизонтальную скорость $\mathbf{v}_0$, он начнет двигаться по параболе с вершиной в точке A (рис. 18-1). Выйдя из поля конденсатора, электрон снова будет двигаться прямолинейно под углом α к скорости $\mathbf{v}_0$.

Как видно из чертежа,

$$\operatorname{tg}\alpha = v'/v_0, \qquad (2)$$

* Обычно заряженная частица, движущаяся в электромагнитном поле, находится также и в гравитационном поле (например, Земли) Поэтому кроме силы $\mathbf{F}$, определяемой по (18.1), на частицу массы m действует также сила тяготения $\mathbf{F}_г = m\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ — напряженность гравитационного поля. Однако, как показывает расчет, для электронов, протонов и других заряженных микрочастиц, движущихся даже в слабых электрических и магнитных полях, величиной $F_г$ можно пренебречь.

** Так как заряд электрона отрицательный, то направление этой силы противоположно направлению силовых линий.

где α — искомый угол, $\mathbf{v}'$ — вертикальная составляющая скорости, приобретенная электроном под действием силы $\mathbf{F}$. Учитывая, что по вертикали электрон движется равноускоренно без начальной скорости, а по горизонтали — равномерно со скоростью v_0, найдем по известным формулам кинематики

$$v' = at = al/v_0. \qquad (3)$$

Теперь с учетом (3) и (1) перепишем формулу (2):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{eEl}{mv_0^2}.$$

Взяв из справочных таблиц значения заряда и массы электрона: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, подставим в последнюю формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ. Выполнив вычисление, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}19; \quad \alpha = 11^\circ.$$

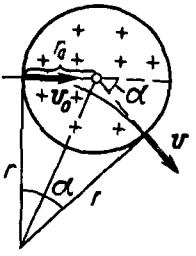

Рис 18 2

18-2. Пучок электронов влетает со скоростью v_0 ($v_0 \ll c$) в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции $\mathbf{B}$. Определить угол α отклонения пучка магнитным полем, если занятая им область представляет собой в сечении плоскостью, нормальной к силовым линиям, окружность радиуса r_0, а скорость $\mathbf{v}_0$ направлена по диаметру этой окружности (рис. 18-2).

Решение. Выясним характер движения электронов в магнитном поле. Согласно (18.1), на влетевший в магнитное поле электрон действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v}_0\,\mathbf{B}]. \qquad (1)$$

Так как сила $\mathbf{F}$ нормальна к скорости $\mathbf{v}$, она изменяет лишь направление вектора скорости, но не его модуль, т. е. сообщает электрону только центростремительное (нормальное) ускорение. При этом вектор скорости остается перпендикулярным вектору $\mathbf{B}$. Следовательно, сила $\mathbf{F}$, определяемая по (1), сохраняет свое численное значение, сообщая электрону постоянное по модулю центростремительное ускорение. Это значит, что электрон движется в магнитном поле по дуге окружности.

Пусть r — радиус этой окружности. Как видно из чертежа, искомый угол α определяется соотношением

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = r_0/r. \qquad (2)$$

Чтобы найти величину r, запишем уравнение движения электрона в магнитном поле, т. е. второй закон Ньютона (2.1). Поскольку $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, уравнение (1) можно записать в скалярной форме так:

$$F = ev_0B,$$

или, используя формулу центростремительного ускорения (1.8),

$$ev_0B = mv_0^2/r.$$

Отсюда получим

$$r = mv_0/eB. \qquad (3)$$

Подставив это значение r в (2), найдем ответ:

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} (r_0eB/mv_0).$$

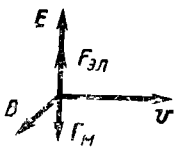

Рис. 18.3

18-3. Однородное магнитное поле, индукция которого $B = 10{,}0$ мТ, направлено перпендикулярно однородному электрическому полю напряженностью $E = 17$ кВ/м. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 15$ кВ и влетев в область, занятую полями, со скоростью, перпендикулярной обоим полям, движется равномерно и прямолинейно (рис. 18-3). Определить отношение q/m для этого иона.

Решение. Прежде чем попасть в область, занятую обоими полями, ион двигался ускоренно. Силы электрического поля (не изображенного на рисунке), совершают работу над ионом, определяемую по (11.3), при этом его кинетическая энергия увеличивается. Полагая начальную кинетическую энергию иона равной нулю, запишем $qU = mv^2/2$. Отсюда получим

$$\frac{q}{m} = \frac{v^2}{2U}. \qquad (1)$$

Мы здесь считаем ион классической частицей по следующим соображениям. Так как заряд иона одного порядка с зарядом электрона, то заведомо $qU \ll 0{,}51$ МэВ, т. е. кинетическая энергия иона пренебрежимо мала по сравнению с энергией покоя электрона. Тем более можно пренебречь этой величиной по сравнению с энергией покоя самого иона, полагая таким образом частицу классической.

Теперь задача сводится к определению скорости движения иона в области, занятой электрическим и магнитным полями. Из характера этого движения следует, что действующая на ион сила (18.1) равна нулю. Значит, взаимная ориентация и модули трех векторов **v**, **B**, **E** в данном случае таковы, что электрическая $\mathbf{F}_{эл}$ и магнитная $\mathbf{F}_м$ силы, действующие на ион, уравновешиваются*. Отсюда, учитывая, что $\sin(\mathbf{v}, \widehat{\ }\mathbf{B}) = 1$, запишем скалярное уравнение:

$$qE = qvB. \qquad (2)$$

* На рис. 18-3 изображены силы, действующие на движущийся положительный ион. Для случая отрицательного иона векторы $\mathbf{F}_{эл}$, $\mathbf{F}_м$ на рисунке следует поменять местами.

Исключив из уравнений (1), (2) величину v, найдем ответ:

$$\frac{q}{m}=\frac{E}{2UB^2}.$$

Подставив в формулу числовые значения величин и выполнив вычисление, получим

$$q/m = 1{,}0 \cdot 10^8 \text{ Кл/кг}.$$

18-4. Электрон влетает со скоростью $v_0 = 1{,}00 \cdot 10^7$ м/с в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам, длина которых $l = 5{,}0$ см. Напряженность электрического поля конденсатора $E = 10{,}0$ кВ/м. При вылете из него электрон попадает в однородное магнитное поле, направленное вдоль вектора $\mathbf{v}_0$. Магнитная индукция этого поля $B = 15$ мТ. Определить траекторию электрона в магнитном поле.

Решение. Повторив рассуждения, приведенные в задаче № 18-1, можно показать, что скорость $\mathbf{v}$ электрона при вылете из конденсатора может быть представлена в виде суммы двух составляющих: горизонтальной скорости $\mathbf{v}_0$ и вертикальной скорости $\mathbf{v}'$ (рис. 18-1), равной

$$v'=at=\frac{eE}{m}\frac{l}{v_0}. \qquad (1)$$

При этом скорость $\mathbf{v}_0$ направлена вдоль линий вектора $\mathbf{B}$, а скорость $\mathbf{v}'$ перпендикулярна им.

Когда электрон попадет в магнитное поле, на него действует сила Лоренца, равная, согласно (18.1), $\mathbf{F}_м = e[\mathbf{vB}]$, или в скалярной форме

$$F_м=evB\sin(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{B}})=ev'B.$$

Если бы электрон обладал только скоростью $\mathbf{v}'$, то под действием силы Лоренца он двигался бы по окружности (см. задачу № 18-2). Радиус ее, согласно формуле (3) задачи № 18-2 и формуле (1) настоящей задачи, равен

$$r=\frac{mv'}{eB}=\frac{El}{v_0 B}. \qquad (2)$$

Так как у электрона есть еще и скорость $\mathbf{v}_0$, перпендикулярная плоскости этой окружности, он будет двигаться по винтовой линии, характеризуемой радиусом и шагом. Радиус винтовой линии определяется формулой (2). Шаг винтовой линии представляет собой то расстояние, на которое переместится электрон, двигаясь равномерно со скоростью $\mathbf{v}_0$ за время, в течение которого он совершит один оборот радиуса r, т. е. за время одного периода. Период T с учетом соотношения (2) равен

$$T=\frac{2\pi r}{v'}=\frac{2\pi m}{eB}.$$

Следовательно, шаг винтовой линии

$$h = v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

Выразим в единицах СИ величины, входящие в формулы (2), (3): $E = 1{,}00 \cdot 10^4$ В/м, $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Т, $l = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ м, $v_0 = 1{,}00 \times \times 10^7$ м/с, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Подставив эти значения и выполнив вычисление, получим:

$$r = 3{,}3 \cdot 10^{-}\ \text{м} = 3{,}3\ \text{мм}; \quad h = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{м} = 2{,}4\ \text{см}.$$

Б. ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Методические указания

1. Составляя уравнение движения для релятивистской частицы, надо учитывать зависимость массы частицы от скорости, а значит и от времени. Вследствие этого второй закон Ньютона для такой частицы записывают не в форме (2.1), а в виде

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \tag{18.4}$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс частицы. Согласно формуле (18.2), релятивистский импульс

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} v = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta_2}}. \tag{18.5}$$

2. Кинетическая энергия T релятивистской частицы вычисляется как разность между полной энергией частицы $W = mc^2$ и энергией ее покоя $W_0 = m_0c^2$:

$$T = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \tag{18.6}$$

где учтена формула (18.2).

Решение задач

18-5. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы приобрести скорость, равную 0,90 c?

Решение. Здесь, как и в задаче № 18-3, силы электрического поля, перемещая заряженную частицу (в данном случае электрон), совершают работу, определяемую по (11.3). По-прежнему полагая начальную кинетическую энергию частицы равной нулю, получим, что работа сил электрического поля равна кинетической энергии, приобретенной электроном, когда он пройдет искомую разность потенциалов U, т. е.

$$eU = T. \tag{1}$$

Так как в данном случае скорость частицы близка к скорости света, то классическое выражение кинетической энергии $mv^2/2$ заменяется релятивистской формулой (18.6), где $\beta = 0{,}90$. Подставив в (1) вместо T ее значение по (18.6) и выполнив вычисление, найдем*

$$U = \frac{m_0 c^4}{} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = 6.6 \ 10^5 \text{ В} = 0{,}66 \text{ МВ}.$$

18-6. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ Т по окружности радиуса $r = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ м Определить кинетическую энергию электрона

Решение Чтобы найти кинетическую энергию частицы (независимо от того, является ли она классической или релятивистской), необходимо знать ее массу покоя m_0 и скорость v или массу m_0 и импульс p. Так как масса покоя электрона — величина известная, задача сводится к определению скорости или импульса электрона. Для этого запишем уравнение движения электрона в магнитном поле, т. е. второй закон Ньютона. Учитывая зависимость массы частицы от скорости, этот закон следует, вообще говоря, записывать в форме (18.4). Но, так как при движении электрона в магнитном поле действующая на него сила Лоренца все время перпендикулярна вектору $\mathbf{v}$, модуль скорости не изменяется. Следовательно, остается постоянной во время движения и масса частицы. Поэтому в данном случае независимо от того, классической или релятивистской является частица, второй закон Ньютона может быть записан в «обычной» форме (2.1):

$$evB = mv^2/r.$$

Отсюда найдем импульс электрона:

$$p = mv = eBr. \qquad (1)$$

Теперь, чтобы выразить кинетическую энергию T электрона через его импульс p, необходимо выяснить: классической или релятивистской частицей следует считать электрон в условиях данной задачи, так как в этих двух случаях зависимость между величинами p, T различная. Для этого вычислим импульс p по формуле (1):

$$p = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ кг·м/с} =$$
$$= 3{,}2 \cdot 10^{-22} \text{ кг·м/с}.$$

Вместе с тем для электрона имеем

$$m_0 c = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ кг·м/с} = 2{,}73 \cdot 10^{-22} \text{ кг·м/с}.$$

Отсюда видно, что неравенство $p \ll m_0 c$, необходимое для того, чтобы частицу можно было считать классической, в данной задаче не выполняется и электрон — релятивистская частица. Поэтому, чтобы выразить его кинетическую энергию T через импульс p, вос-

* При вычислении U учтем, что так как для электрона $m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ, то, очевидно, $m_0c^2/e = 0{,}51$ МВ $= 5{,}1 \cdot 10^5$ В.

пользуемся формулами (18.5) и (18.6). Исключив из них величину β, найдем

$$T = m_0 c^2 [\sqrt{1+(p/m_0 c)^2} - 1]. \qquad (2)$$

Так как для электрона $m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ, а величины p, m_0c уже вычислены, то по (2) получим

$$T = 0{,}28 \text{ МэВ}$$

18-7. Радиус орбиты электронов, ускоряемых бетатроном, $r = 300$ мм. Среднее по площади орбиты значение магнитной индукции $B_{ср}$ поля, создаваемого магнитом бетатрона, изменяясь со временем приблизительно по линейному закону, возрастает от нуля до $B_1 = 0{,}200$ Т. Определить скорость, приобретенную за это время электронами.

Решение. В магнитном поле бетатрона под действием лоренцовых сил электроны движутся по окружности. При изменении магнитного поля изменяется магнитный поток Φ сквозь контур, совпадающий с орбитой электронов, что порождает вихревое электрическое поле. Так как электроны движутся вдоль одной из силовых линий электрического поля, то под действием последнего скорость их будет возрастать.

Напряженность E вихревого электрического поля в точках орбиты электронов найдем по закону электромагнитной индукции [см. формулу (16.6)]:

$$\mathscr{E} = \oint E_l \, dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

где контур интегрирования совпадает с одной из линий вектора **E**, имеющей форму окружности радиуса r. Поэтому $E_l = E = \text{const}$ для всех точек контура и, следовательно,

$$\oint E_l \, dl = E \cdot 2\pi r. \qquad (2)$$

Так как магнитный поток изменяется равномерно в течение t от нуля до значения $\Phi_{макс}$, то скорость его изменения можно выразить так:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi_{макс}}{t} = \frac{B_1 \pi r^2}{t}. \qquad (3)$$

Из (1)—(3) получим для модуля вектора **E**

$$E = B_1 r / 2t.$$

Значит, на каждый электрон, движущийся в магнитном поле по окружности, будет действовать со стороны вихревого электрического поля постоянная по модулю сила, равная

$$F = eE = \frac{B_1 r e}{2t} \qquad (4)$$

и направленная вдоль вектора скорости, а потому сообщающая электрону *тангенциальное* ускорение.

Чтобы найти скорость, приобретенную электроном в результате действия на него в течение времени t силы F, применим к нему второй закон Ньютона, записав его для *касательного* к траектории направления. Поскольку в бетатроне электроны разгоняются, как правило, до скоростей, близких к скорости света, запишем уравнение движения электрона в форме (18.4) с учетом (18.2):

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Интегрируя это уравнение и принимая, что $v = 0$ при $t = 0$, найдем

$$Ft = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

откуда

$$v = \frac{Fct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}. \qquad (5)$$

Наконец, подставив в уравнение (5) значение F из формулы (4), определим

$$v = \frac{B_1 rec}{\sqrt{4m_0^2 c^2 + B_1^2 r^2 e^2}}.$$

Выразим в единицах СИ величины, входящие в формулу: $B_1 = 0{,}200$ Т, $r = 0{,}300$ м; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с. Выполнив вычисление, получим

$$v = 0{,}999\ c.$$