Глава 6
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 19. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Основные формулы

Смещение, скорость и ускорение при гармоническом колебании определяются уравнениями

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{19.1}$$

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{19.2}$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x, \tag{19.3}$$

где A — амплитуда колебания, ω — циклическая частота, φ_0 — начальная фаза.

Циклическая частота ω, период колебаний T и частота ν связаны соотношениями

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu. \tag{19.4}$$

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода, амплитуда которого A и начальная фаза φ_0 определяются уравнениями:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \tag{19.5}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}, \tag{19.6}$$

где A_1 и A_2 — амплитуды слагаемых колебаний, φ_1 и φ_2 — их начальные фазы.

Сила, действующая на тело при свободном гармоническом колебании (*квазиупругая сила*), всегда пропорциональна смещению и направлена в сторону, противоположную смещению:

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx \tag{19.7}$$

где $k = m\omega_0^2$ — коэффициент квазиупругой силы, измеряемый силой, вызывающей смещение x, равное единице.

При отсутствии сопротивления среды циклическая частота ω_0 свободных гармонических колебаний, называемая *собственной циклической частотой* и период T равны:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi\sqrt{m/k} \tag{19.8}$$

Период колебаний математического маятника длиной l равен

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{19.9}$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgd}, \tag{19.10}$$

где I — момент инерции маятника относительно оси качаний,

d — расстояние от оси до его центра тяжести.

Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, постоянна и равна

$$W = m\omega^2 A^2/2. \tag{19.11}$$

Уравнение смещения в затухающих колебаниях при наличии силы сопротивления $F_{сопр}$ пропорциональной скорости ($F_{сопр} = -rv$, где r — коэффициент сопротивления), имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (19.12)$$

Здесь $A_0 e^{-\beta t}$ — убывающая во времени амплитуда смещения; β — коэффициент затухания; ω — циклическая частота; A_0, φ_0 — начальные амплитуда и фаза (определяются из начальных условий) Величины β, ω выражаются через параметры системы r, m, k формулами:

$$\beta = r/2m, \qquad (19.13)$$

$$\omega = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{k/m - r^2/4m^2}. \qquad (19.14)$$

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln(A_1/A_2) = \beta T, \qquad (19.15)$$

где A_1 и A_2 — амплитуды двух последовательных колебаний.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = h / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \qquad (19.16)$$

где h есть отношение амплитуды вынуждающей силы к массе тела; ω_0 — собственная циклическая частота; ω — циклическая частота вынуждающей силы.

Резонансная циклическая частота равна

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (19.17)$$

А. КИНЕМАТИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Методические указания

1. Уравнения гармонического колебания можно записать двумя способами, основанными на простой связи между синусом и косинусом:

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2), \qquad \sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2).$$

Поэтому смещение, скорость и ускорение *того же самого* гармонического колебания, которое описывается формулами (19.1)—(19.3), всегда можно записать в виде уравнений:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi'),$$

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi'),$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi') = -\omega^2 x,$$

где $\varphi' = \varphi_0 - \pi/2$. Начальные фазы φ_0 или φ' при решении задач находят из начальных условий (см. задачу № 19-1).

2. Из системы (19.1)—(19.3) следует, что максимальному смещению при гармоническом колебании соответствуют нулевая скорость и максимальное ускорение, направленное противоположно смещению (в сторону равновесия). Наоборот, в положении равновесия ($x = 0$) скорость максимальная, а ускорение равно нулю.

3. При сложении n ($n > 2$) одинаково направленных гармонических колебаний равных периодов амплитуду и начальную фазу результирующего колебания можно находить по формулам (19.5) и (19.6), по-

следовательно применяя их $n - 1$ раз. Однако более эффективным в этом случае является метод векторных диаграмм (см. задачу № 9-3).

4. В задачах на определение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, следует исключать время t из уравнений складываемых колебаний, представленных в виде:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$
$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Если при этом $\omega_1 = \omega_2$, то результирующей траекторией движущейся точки будет эллипс.

Способ нахождения скорости и ускорения точки в любой момент ее движения по траектории рассмотрен в решении задачи № 19-5.

Решение задач

19-1. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 500$ Гц и амплитудой $A = 0{,}020$ см. Определить средние значения скорости $\langle v \rangle$ и ускорения $\langle a \rangle$ точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия, а также найти максимальные значения этих величин: $v_{макс}$ и $a_{макс}$.

Решение. По определению средней скорости имеем

$$\langle v \rangle = \Delta l / \Delta t, \tag{1}$$

где Δl — путь, пройденный за время Δt. В данном случае $\Delta l = A$; $\Delta t = T/4$, поскольку за время периода T колеблющаяся точка проходит путь, равный четырем амплитудам. Подставив эти значения Δl и Δt в (1) и учитывая соотношение (19.4), получим

$$\langle v \rangle = 4A/T = 4\nu A. \tag{2}$$

По формуле (19.2), положив $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$, найдем максимальную скорость:

$$v_{макс} = \omega A = 2\pi\nu A. \tag{3}$$

Согласно определению среднего ускорения, запишем

$$\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t, \tag{4}$$

где $\Delta v = v - v_0$. В данном случае начальная скорость $v_0 = 0$, конечная скорость $v = v_{макс} = \omega A$. Подставим значения Δv и $\Delta t = T/4$ в формулу (4), используя соотношение (19.4):

$$\langle a \rangle = 4\omega A/T = 8\pi\nu^2 A. \tag{5}$$

По формуле (19.3), приняв $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$, найдем максимальное ускорение:

$$a_{макс} = \omega^2 A = 4\pi^2\nu^2 A. \tag{6}$$

Подставив в формулы (2), (3), (5), (6) числовые значения величин и выполнив вычисление, получим:

$$\langle v \rangle = 40 \text{ см/с}, \quad v_{\text{макс}} = 63 \text{ см/с}, \quad \langle a \rangle = 1{,}2 \cdot 10^5 \text{ см/с}^2,$$
$$a_{\text{макс}} = 2{,}0 \cdot 10^5 \text{ см/с}^2.$$

Замечание. Проверкой легко убедиться в том, что средние величины $\langle v \rangle$ и $\langle a \rangle$ на пути от крайнего положения до положения равновесия колеблющейся точки не равны среднему арифметическому между начальными и конечными значениями этих величин. Методом среднего арифметического для нахождения $\langle v \rangle$ и $\langle a \rangle$ здесь пользоваться нельзя, поскольку скорость и ускорение при гармоническом колебании, как это следует из (19.2), (19.3), не являются линейными функциями времени (см стр 11).

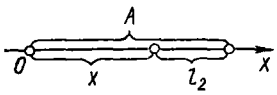

Рис 19 1

19-2. За какую часть периода точка, совершающая гармоническое колебание, пройдет путь, равный: 1) половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия; 2) одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении?

Решение. 1. Путь $l_1 = A/2$, пройденный точкой в гармоническом колебании при движении от положения равновесия к крайнему положению, равен смещению x, определяемому уравнением (19.1), которое с учетом (19.4) запишем так:

$$x = A \sin (2 \pi t/T + \varphi_0). \tag{1}$$

Чтобы найти начальную фазу φ_0, воспользуемся начальными условиями задачи: $x = 0$ при $t = 0$. Подставив эти значения x и t в (1), получим $\varphi_0 = 0$, следовательно*,

$$x = A \sin (2 \pi t/T). \tag{2}$$

Подставив в (2) значение $x = A/2$, получим искомое время, выраженное в долях периода:

$$t = T/12.$$

2. Точка движется из крайнего положения, поэтому начальные условия будут такие: $x = A$ при $t = 0$. Подставив эти значения x и t в уравнение (1), получим $\varphi_0 = \pi/2$. Следовательно,

$$x = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos (2\pi t/T). \tag{3}$$

Чтобы избежать ошибки, учтем, что исходное уравнение (19.1) выражает *смещение* x точки при гармоническом колебании, отсчитанное от положения равновесия (точка O на рис. 19-1), но не путь, прой-

* Вместо (1) можно было записать: $x = A \cos (\omega t + \varphi')$. Из начальных условий имеем $x = 0$ при $t = 0$. Подставив эти значения в уравнение, найдем начальную фазу $\varphi' = \pm\pi/2$. Считая, что точка начинает движение в сторону положительных значений x, должны взять $\varphi' = -\pi/2$. Следовательно, $x = A \cos (\omega t - \pi/2) = A \sin \omega t$, что совпадает с (2).

денный точкой; лишь в частном случае движения точки из положения равновесия к крайнему положению эти величины численно равны (этим мы воспользовались в первом случае). Если точка, двигаясь из крайнего положения, прошла путь $l_2 = A/3$, то, как видно из рис 19-1, ее смещение равно

$$x = A - l_2 = 2/3\ A.$$

Подставив это значение x в формулу (3), получим $\cos(2\pi t/T) = 2/3$. Отсюда, пользуясь таблицей косинусов, найдем искомое время в долях периода:

$$\frac{2\pi}{T} t = 48°, \quad t = \frac{48°}{360°} T = \frac{T}{7{,}5}.$$

19-3. Материальная точка участвует в трех колебаниях, происходящих по одной прямой и выраженных уравнениями:

$$x_1 = 3 \cos t, \tag{1}$$

$$x_2 = 3 \cos (t + \pi/3), \tag{2}$$

$$x_3 = 3 \sin (t + 7\pi/6) \tag{3}$$

(смещения даны в сантиметрах). Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Написать его уравнение.

Решение. Точка участвует в трех *гармонических* колебаниях, так как смещения x_1, x_2, x_3 являются синусоидальными (косинусоидальными) функциями времени. Результирующее колебание точки также будет гармоническим. Его амплитуду и начальную фазу можно найти по формулам (19.5) и (19.6). Однако они выведены для случая, когда уравнения слагаемых колебаний содержат одну и ту же тригонометрическую функцию: синус или косинус. Поэтому перепишем уравнение (3), выразив x_3 через косинус:

$$x_3 = 3 \cos (t + 2\pi/3). \tag{3a}$$

Сравнив (1), (2), (3а) с общим уравнением смещения гармонических колебаний, видим, что складываемые колебания характеризуются следующими величинами: амплитуды $A_1 = A_2 = A_3 = 3$ см; циклические частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ рад/с; начальные фазы $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/3$, $\varphi_3 = 2\pi/3$.

С помощью формул (19.5) и (19.6) можно сначала сложить любые два из трех заданных колебаний. Затем, еще раз применив эти формулы, найти амлитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания.

К этому же результату придем быстрее, применив *метод векторных диаграмм*. Сущность его в том, что амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания находят путем сложения векторов. Длина каждого вектора берется равной амплитуде соответствующего колебания, а угол, образованный вектором с осью x, — начальной фазе. Величины A и φ определяются длиной результирующего вектора и углом его наклона к оси x.

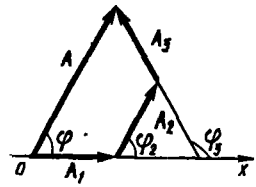

Рис. 19-2

На рис. 19-2 построена векторная диаграмма по данным задачи. Из чертежа сразу получаем: $\varphi = \pi/3$, $A = 2A_1$, т. е. $A = 6$ см. Теперь запишем уравнение результирующего колебания:

$$A = 6 \cos (t + \pi/3).$$

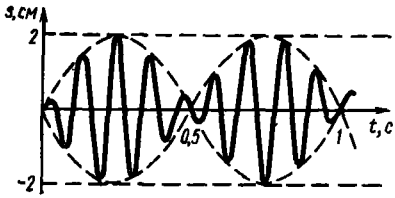

Рис. 19-3

19-4. Известно, что сложное колебание, график которого дан на рис. 19-3, состоит из двух синусоидальных колебаний. Найти их частоты и амплитуды.

Решение. Приведенный график изображает гармоническое колебание с медленно периодически изменяющейся амплитудой. Такие колебания, называемые *биениями*, получаются в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с мало различающимися частотами. При этом частота сложных колебаний ν оказывается равной полусумме частот слагаемых колебаний ν_1 и ν_2:

$$\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2, \qquad (1)$$

а частота изменения амплитуды, называемая *частотой биений*, равна разности частот:

$$\nu_{\text{ампл}} = |\nu_1 - \nu_2|. \qquad (2)$$

Из графика видно, что за одну секунду произошло девять полных колебаний, значит, $\nu = 9$ Гц. За это же время совершилось два полных цикла изменения амплитуды, следовательно, $\nu_{\text{ампл}} = 2$ Гц. Подставив в (1) и (2) значения ν, $\nu_{\text{ампл}}$ и решив эту систему уравнений, найдем:

$$\nu_1 = 8 \text{ Гц}; \quad \nu_2 = 10 \text{ Гц}.$$

Амплитуда сложного колебания в каждый момент определяется формулой (19:5). При этом ее максимальное значение при $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ равно

$$A_{\text{макс}} = A_1 + A_2. \qquad (3)$$

Минимальное значение амплитуды получим при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$:

$$A_{мин} = A_1 - A_2. \qquad (4)$$

Но из графика видно, что $A_{макс} = 2$ см, $A_{мин} = 0$. Подставив эти значения $A_{макс}$ и $A_{мин}$ в (3) и (4), найдем

$$A_1 = A_2 = 1 \text{ см}.$$

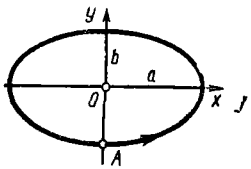

Рис 19 4

19-5. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выраженных уравнениями $x = 2\sin \pi t$; $y = -\cos \pi t$ (смещения даны в сантиметрах). Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже. Показать направление движения точки. Определить скорость и ускорение точки в момент $t = 0{,}5$ с.

Решение. Так как циклические частоты слагаемых колебаний одинаковы, траекторией точки будет эллипс. Исключив время t из двух заданных уравнений, получим

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $a = 2$ см и $b = 1$ см (рис. 19-4). Чтобы определить направление движения точки, учтем, что в момент $t = 0$ имеем $x = 0$, $y = -1$ см и, следовательно, точка находится в положении A (рис. 19-4). При возрастании t увеличивается также x, значит, точка движется по траектории против часовой стрелки

Скорость точки $\mathbf{v}$ при ее движении по эллипсу равна векторной сумме скоростей $\mathbf{v}_x$ и $\mathbf{v}_y$ в слагаемых колебаниях. Поскольку эти колебания взаимно перпендикулярны, то

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (1)$$

Аналогично определим искомое ускорение:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \qquad (2)$$

где a_x, a_y — ускорения точки в слагаемых колебаниях.

По формулам (19.2) и (19.3) имеем:

$$v_x = 2\pi \cos \pi t; \quad v_y = \pi \sin \pi t;$$

$$a_x = -2\pi^2 \sin \pi t; \quad a_y = \pi^2 \cos \pi t.$$

Подставив эти значения в формулы (1) и (2), найдем:

$$v = \sqrt{4\pi^2 \cos^2 \pi t + \pi^2 \sin^2 \pi t};$$

$$a = \sqrt{4\pi^4 \sin^2 \pi t + \pi^4 \cos^2 \pi t}.$$

Взяв $t = 0{,}5$ с и выполнив вычисление, получим: $v = 3{,}14$ см/с, $a = 19{,}7$ см/с^2.

З а м е ч а н и е. Было бы ошибкой искать ускорение a как производную dv/dt. Величина dv/dt в соответствии с формулой (1.7) выражает тангенциальное ускорение a_τ движущейся точки, но не полное ускорение a. В криволинейном движении $a_\tau \neq a$.

Б. ДИНАМИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Методические указания

1. Если тело совершает колебания под действием квазиупругой силы, то независимо от природы этой силы циклическая частота и период колебаний (они будут гармоническими) всегда определяются формулами (19.8), где k — коэффициент квазиупругой силы. В частности, если колебания обусловлены упругой силой пружины, то коэффициент k называется *жесткостью* пружины, а формулы (19.8) выражают циклическую частоту и период колебаний пружинного маятника.

2. Циклическая частота ω затухающих колебаний, как это следует из соотношения (19.14), всегда меньше циклической частоты свободных колебаний при отсутствии сопротивления, т. е. собственной частоты ω_0. Таким образом, сопротивление среды приводит к уменьшению частоты и к увеличению периода колебаний. Однако во многих задачах, когда сопротивление среды незначительно, его влиянием можно пренебречь и рассчитывать частоту и период слабо затухающих колебаний по формулам (19.8). Это можно делать при выполнении следующих неравенств:

$$1)\ \beta^2 \ll \omega_0^2 \quad \text{или} \quad 2)\ \lambda^2 \ll 4\pi^2.$$

Первое условие вытекает непосредственно из формулы (19.14); второе выведено при решении задачи № 19-10. Оба условия эквиваленты друг другу.

Решение задач

19-6. Шар, радиус которого $R = 5{,}00$ см, подвешен на нити длиной $l_0 = 10{,}0$ см. Определить относительную погрешность, которую допускают, если, вычисляя период колебаний маятника, принимают его за математический маятник длиной $l = 15{,}0$ см.

Р е ш е н и е. Шар, висящий на нити, представляет собой физический маятник. Его период $T_ф$ выражается формулой (19.10). Если принять маятник за математический, то его период $T_м$ надо находить по формуле (19.9), полагая согласно условию длину l равной расстоянию от точки подвеса до центра тяжести шара:

$$l = l_0 + R = d. \qquad (1)$$

Таким образом, считая маятник математическим, мы заменяем шар материальной точкой, расположенной в его центре, что вызывает некоторую погрешность в вычислении периода.

С помощью формул (19.9), (19.10) найдем отношение периодов $T_ф$ и $T_м$, учитывая соотношение (1):

$$\frac{T_ф}{T_м} = \sqrt{\frac{I}{md^2}}. \qquad (2)$$

Момент инерции шара относительно оси качаний согласно формулам (4.5в) и (4.6) равен

$$I = {}^2/_5 mR^2 + md^2.$$

Подставив это значение I в (2), получим

$$\frac{T_ф}{T_м} = \sqrt{1 + \frac{2R^2}{5d^2}} = \sqrt{1{,}044} = 1{,}022.$$

Отсюда найдем относительную погрешность в вычислении периода:

$$\frac{\Delta T}{T_ф} = \frac{T_ф - T_м}{T_ф} \approx 0{,}022, \text{ или } 2{,}2\%.$$

19-7. Тело, неподвижно висящее на цилиндрической пружине, растягивает ее на $x_0 = 5{,}0$ см. Затем тело было смещено из положения равновесия по вертикали и отпущено, в результате чего оно стало совершать колебания. Найти их период.

Решение. Если бы тело совершало колебания только под действием упругой силы пружины $F_{упр} = -kx$, их период можно было бы определить по формуле (19.8). В данном случае на тело еще действует сила тяжести mg. Чтобы выяснить ее влияние на колебания груза, рассмотрим силы, действующие на тело, в двух положениях:

1) тело неподвижно висит на пружине. Равнодействующая сил, приложенных к телу, $F_1 = 0$. Приняв направление вниз за положительное, запишем

$$F_1 = mg - kx_0 = 0; \qquad (1)$$

2) тело смещено из положения равновесия на x'. Будем считать x' величиной алгебраической. Пружина в этом случае растянулась на $x_0 + x'$. Равнодействующая сил, приложенных к телу, равна

$$F_2 = mg - k(x_0 + x').$$

Раскрывая скобки и учитывая (1), получим

$$F_2 = -kx'. \qquad (2)$$

Из (2) видно, что равнодействующая сил $F_{упр}$ и mg пропорциональна растяжению пружины и противоположна ему по направлению, если только это растяжение отсчитывать от положения равновесия висящего на пружине груза. Следовательно, и при наличии силы тяжести тело будет совершать гармонические колебания. По формуле (19.8), где согласно (1) $k = mg/x_0$, найдем период этих колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{5{,}0}{980}}\ \text{с} = 0{,}45\ \text{с}.$$

19-8. Ареометр массы 55 г, плавающий в растворе серной кислоты, указывает, что плотность жидкости $\rho = 1{,}27$ г/см^3. Если прибор сместить из положения его равновесия немного по вертикали и отпустить, он начнет колебаться. Считая колебания незатухающими, определить их период, если радиус цилиндрической трубки ареометра, в которой заключена его шкала, равен $r = 0{,}30$ см.

Решение. На погруженный в жидкость ареометр действуют две силы: сила тяжести mg и выталкивающая, архимедова, сила F_A, равная весу жидкости, вытесненной телом:

$$F_A = P_{ж} = m_{ж} g = \rho V g,$$

где V — объем вытесненной жидкости, равный объему погруженной части ареометра. Как и в предыдущей задаче, выясним соотношение между действующими на тело силами в двух случаях:

1) ареометр находится в равновесии. Приложенные к нему силы уравновешиваются. Приняв направление вниз за положительное, запишем

$$mg - \rho g V = 0;$$

2) ареометр смещен из положения равновесия по вертикали на величину x (x — алгебраическая величина). Поскольку изменится объем погруженной части прибора, выталкивающая сила также изменится. К ареометру будет приложена равнодействующая, направленная по вертикали и равная

$$F = mg - \rho g (V + \Delta V), \qquad (2)$$

где $\Delta V = \pi r^2 x$ — изменение объема погруженной части прибора. Подставив в (2) это значение ΔV и раскрыв скобки, получим с учетом (1)

$$F = -\pi r^2 \rho g x = -kx, \qquad (3)$$

где $k = \pi r^2 \rho g$ — постоянная величина. Видим, что на ареометр действует сила, пропорциональная смещению, взятому с обратным знаком, т. е. квазиупругая сила. Следовательно, он совершает гармонические колебания, период которых найдем по (19.8):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\pi r^2 \rho g}} = \frac{2\pi}{r} \sqrt{\frac{m}{\pi \rho g}} = 2{,}5 \text{ с}.$$

19-9. Энергия затухающих колебаний маятника, происходящих в некоторой среде, за время $t = 2{,}00$ мин уменьшилась в $N = 100$ раз. Определить коэффициент сопротивления, если масса маятника $m = 0{,}100$ кг.

Решение. Коэффициент сопротивления r связан с коэффициентом затухания β и массой m тела соотношением (19.13):

$$r = 2m\beta. \qquad (1)$$

Чтобы найти величину β, обратимся к уравнению затухающих колебаний (19.12). Стоящий в нем сомножитель

$$A = A_0 e^{-\beta t} \qquad (2)$$

выражает уменьшающуюся со временем амплитуду колебаний. Из (19.11) следует, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, обозначив начальную и конечную энергию колебаний через W_0 и W, можно записать:

$$N = \frac{W_0}{W} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2; \quad \frac{A_0}{A} = \sqrt{N} = 10{,}0. \qquad (3)$$

Теперь из (2) и (3) имеем $e^{-\beta t} = 10$. Логарифмируя, находим:

$$\beta t = \ln 10{,}0; \quad \beta = (\ln 10{,}0)/t.$$

Подставив найденное значение β в (1), получим ответ:

$$r = 2\,m\,(\ln 10{,}0)/t.$$

Учитывая, что $m = 0{,}100$ кг, $t = 120$ с, $\ln 10{,}0 = 2{,}3$, выполним вычисление:

$$r = \frac{2 \cdot 0{,}100 \cdot 2{,}3}{120} \text{ кг/с} = 0{,}0038 \text{ кг/с}.$$

19-10. Гиря массы 0,500 кг подвешена к пружине, жесткость которой $k = 32{,}0$ Н/м, и совершает затухающие колебания. Определить их период в двух случаях: 1) за время, в течение которого произошло $n_1 = 88$ колебаний, амплитуда уменьшилась в $N_1 = 2{,}00$ раза; 2) за время двух колебаний ($n_2 = 2{,}00$) амплитуда уменьшилась в $N_2 = 20$ раз.

Решение. Сопротивление среды уменьшает частоту свободных колебаний. Циклическая частота затухающих колебаний определяется по (19.14), откуда период равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (1)$$

Собственную циклическую частоту ω_0 выразим сразу по (19.8), зная массу m гири и жесткость k пружины:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 8{,}0 \text{ рад/с}. \qquad (2)$$

Коэффициент же затухания β нельзя найти непосредственно из условия задачи. Согласно (19.15) он равен

$$\beta = \lambda/T. \qquad (3)$$

Чтобы найти величину λ, обратимся к уравнению затухающих колебаний (19.12). Уменьшающуюся со временем амплитуду с учетом (3) выразим так:

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\lambda t/T}. \qquad (4)$$

Пользуясь введенными в условии обозначениями, можно записать: $A_0/A = N$; $t/T = n$. Тогда из (4) следует $e^{\lambda n} = N$, откуда, логарифмируя, имеем

$$\lambda = (\ln N)/n.$$

Подставив числовые значения N и n для двух случаев, выполним вычисление:

$$\lambda_1 = 0{,}0079; \quad \lambda_2 = 1{,}5.$$

Теперь перепишем формулу (1) с учетом (3):

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2/T^2}}.$$

Получилось квадратное уравнение относительно периода T. Решив его, найдем (отбрасывая отрицательный корень)

$$T = \sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}/\omega_0. \qquad (5)$$

Приступая к вычислениям периода, заметим, что в первом случае $\lambda_1^2 \ll 4\pi^2$ Поэтому, сохраняя достаточно высокую точность вычислений, можно в формуле (5) пренебречь членом λ^2 и тогда

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{8{,}0} = 0{,}78 \text{ с}.$$

Во втором случае нельзя отбросить величину λ^2. Тогда производя вычисления по (5), получим

$$T_2 = 0{,}81 \text{ с}.$$

19-11 Чему равна амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A_{рез}$, если при очень малой (по сравнению с собственной) частоте вынужденных колебаний она равна $A_0 = 0{,}10$ см, а логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}010$?

Решение. Как видно из (19.16), амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты ω вынуждающей силы. При некотором значении $\omega = \omega_{рез}$, определяемом по (19.17), наступает явление резонанса: амплитуда достигает максимального значения $A_{рез}$. Величину $A_{рез}$ выразим по (19.16), подставив из (19.17) $\omega_{рез}$ вместо ω. После ряда упрощений найдем

$$A_{рез} = h/2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (1)$$

Из формулы (19.16) можно также вывести простое соотношение между величинами A_0 и h. Учитывая вытекающие из условия соотношения: 1) $\omega \ll \omega_0$; 2) $\lambda^2 \ll 4\pi^2$, откуда следует, что $\beta^2 \ll \omega_0^2$ (см. п. 2 методических указаний на стр. 223), отбросим члены ω^2 и $4\beta^2\omega^2$ в (19.16):

$$A_0 = h/\omega_0^2.$$

Подставив это значение h в формулу (1) и пренебрегая величиной β^2 по сравнению с ω_0^2, получим

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_0 \omega_0^2}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{A_0 \omega_0}{2\beta}. \qquad (2)$$

Выразим собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания β по формулам (19.4) и (19.15):

$$\omega_0 = 2\pi/T_0; \quad \beta = \lambda/T.$$

Здесь T_0 — период свободных колебаний при отсутствии сопротивления; T — период затухающих колебаний, которые начались бы после прекращения действия вынуждающей силы. Подставив эти значения ω_0 и β в соотношение (2) и учитывая, что при слабом затухании ($\lambda^2 \ll 4\pi^2$) $T \approx T_0$, найдем окончательный ответ:

$$A_{\text{рез}} = \pi A_0/\lambda = 31 \text{ см}.$$

§ 20. ВОЛНЫ В УПРУГИХ СРЕДАХ. ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ

Основные формулы

Уравнение бегущей волны, распространяющейся со скоростью c в направлении оси Oy:

$$x = A \sin [\omega (t - y/c) + \varphi_0], \qquad (20.1)$$

где x — смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии y от источника гармонических колебаний, характеризующихся амплитудой A, циклической частотой ω и начальной фазой φ_0.

Длина волны λ и ее скорость c связаны соотношением

$$\lambda = cT = c/\nu, \qquad (20.2)$$

где T — период колебаний; $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ — их частота.

Связь между разностью фаз двух точек бегущей волны и разностью хода $y_2 - y_1$ (т. е. разностью расстояний этих точек от источника колебаний):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi (y_1 - y_2)/\lambda \qquad (20.3)$$

В результате интерференции волн амплитуда достигает максимального значения при условии

$$|y_2 - y_1| = \Delta = 2k (\lambda/2) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (20.4)$$

и минимального значения при условии

$$\Delta = (2k + 1) (\lambda/2) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (20.5)$$

Явление Доплера: если источник и приемник звука перемещаются относительно среды, в которой распространяется звук, то частота звуковых колебаний ν', регистрируемая приемником звука, связана с частотой колебаний ν источника соотношением

$$\nu' = \nu \frac{c + v}{c - u}, \qquad (20.6)$$

где c, u, v — скорости соответственно звука, его источника и приемника. Формула (20.6) относится к случаю, если источник и приемник звука движутся по одной прямой. При этом величины u, v — алгебраические: $u > 0$, если источник движется к приемнику; $u < 0$, если источник удаляется от приемника. Аналогично, $v > 0$, если приемник приближается к источнику; $v < 0$, если приемник движется от источника.