

З а м е ч а н и е. Если в задаче будет идти речь о звуке, частота которого существенно отличается от $v = 1000$ Гц, приведенное решение окажется неверным. Действительно, тогда для уровня громкости L_N вместо (1) надо будет записать соотношение (20.12):

$$L_N = 10 \lg (I_N/I_0)$$

и во всех формулах данной задачи величины I_1, I_2 заменить соответственно величинами I_{N1}, I_{N2} . Но теперь в отличие от равенства (4) будет

$$I_{N2}/I_{N1} \neq r_1^2/r_2^2,$$

поскольку величина I_N является также функцией частоты звука (так как ухо человека неодинаково чувствительно к звукам разных частот).

Правильный путь решения задачи для случая любой звуковой частоты связан с использованием соотношения (4) и графика, на котором представлено семейство кривых равного уровня громкости. Пусть, например, частота звука равна 100 Гц. Тогда по графику уровней громкости, зная частоту и уровень громкости ($L_{N1} = 40$ фон), определим интенсивность звука $I_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ Вт/м². Затем по тому же графику, рассмотрев кривую, соответствующую порогу слышимости, найдем, что при частоте 100 Гц интенсивность звука $I_2 = 8 \cdot 10^{-9}$ Вт/м². Подставив эти значения I_1, I_2 в формулу (4) и произведя вычисление, получим

$$r_2 = 0,25 \text{ км.}$$

§ 21. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Основные формулы

При свободных колебаниях в контуре, содержащем конденсатор емкостью C , катушку индуктивностью L и резистор с омическим сопротивлением R , соединенных последовательно, заряд на обкладках конденсатора изменяется во времени по закону

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (21.1)$$

где $q_0 e^{-\beta t}$ — амплитуда затухающих колебаний; β — коэффициент затухания; ω — циклическая частота; q_0, φ_0 — начальные амплитуда и фаза (определяются из начальных условий). Величины β, ω выражаются через параметры контура R, L, C формулами:

$$\beta = R/2L, \quad (21.2)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}; \quad (21.3)$$

здесь

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} \quad (21.4)$$

— циклическая частота свободных незатухающих колебаний, которые устанавливаются в контуре при условии $R \rightarrow 0$.

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln(a_1/a_2) = \beta T, \quad (21.5)$$

где a_1 , a_2 — амплитудные значения в двух последовательных колебаниях любой из величин q , U , I (U — напряжение на конденсаторе; I — сила тока в колебательном контуре); T — период колебаний

Добротность колебательного контура Q связана с логарифмическим декрементом затухания:

$$Q = \pi/\lambda. \quad (21.6)$$

Если в колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора емкостью C , катушки индуктивностью L и резистора с омическим сопротивлением R , действует периодическая э. д. с. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, то в такой цепи устанавливаются вынужденные колебания тока той же частоты ω :

$$I = I_0 \sin (\omega t - \varphi), \quad (21.7)$$

при этом величины I_0 , φ выражаются формулами:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}, \quad (21.8)$$

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}. \quad (21.9)$$

Амплитуда тока I_0 при вынужденных колебаниях достигает максимального значения (явление резонанса), если частота ω вынужденных колебаний совпадает с частотой ω_0 свободных незатухающих колебаний, определяемой по (21.4). Таким образом, резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \sqrt{1/LC}. \quad (21.10)$$

В цепи переменного синусоидального тока действующие (эффективные) значения силы тока I_d и э. д. с. \mathcal{E}_d связаны с их амплитудными значениями I_0 , E_0 соотношениями:

$$I_d = I_0 / \sqrt{2}, \quad \mathcal{E}_d = E_0 / \sqrt{2} \quad (21.11)$$

Скорость электромагнитных волн в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (21.12)$$

где $c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с — скорость электромагнитных волн в вакууме

Плотность потока энергии (или интенсивность излучения) электромагнитных волн, т. е. количество энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга:

$$\mathbf{P} = |\mathbf{E} \mathbf{H}|, \quad (21.13)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — векторы напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Методические указания

1. Методы решения задач на электромагнитные колебания сходны с методами решения задач на механические колебания. В основе этого сходства лежит одинаковая структура уравнений, описывающих оба этих вида колебаний. Так, например, формулы (21.1)–(21.5) настоящего параграфа, характеризующие свободные электромагнитные колебания, аналогичны формулам (19.12)–(19.15), (19.8) для свободных механических колебаний. При этом заряд q соответствует смещению x , омическое сопротивление R — коэффициенту сопротивления среды r .

индуктивность L — массе m , емкость C — величине, обратной коэффициенту квазиупругой силы k . Все сказанное в п. 2 методических указаний раздела «Динамика колебательного движения» (см. стр. 223) справедливо в отношении электромагнитных колебаний, если слова «сопротивление среды» заменить словами «омическое сопротивление».

Сходство уравнений приводит к сходству решений задач, основанных на этих уравнениях. Так, в задачах № 19-9, 19-10 на затухающие механические колебания легко найти их электрические аналоги. В связи с этим заметим, что формуле (19.11), которая была использована при решении задачи № 19-9, соответствует аналогичная формула для энергии электромагнитных колебаний

$$W = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\omega^2 q_0^2}{2}.$$

(Эта формула вытекает из решения задачи № 21-1.)

2 Если в формуле (21.8), выражающей связь между амплитудами тока и э. д. с. при вынужденных колебаниях в контуре, заменить амплитудные значения I_0, \mathcal{E}_0 их действующими значениями I_d, \mathcal{E}_d по формулам (21.11), то получим закон Ома для цепи переменного тока

$$I_d = \mathcal{E}_d / Z,$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

— полное (действующее) сопротивление цепи. Оно состоит из сопротивлений омического R , индуктивного $L\omega$ и емкостного $1/C\omega$. Обратите внимание: отсутствие в цепи переменного тока конденсатора означает отсутствие емкостного сопротивления, т. е. $1/C\omega = 0$, следовательно, $C = \infty$ (!).

3. Законы последовательного и параллельного соединений в цепях постоянного тока не годятся для переменного тока, если его характеризовать не мгновенными значениями величин I, U, \mathcal{E} , а действующими I_d, U_d, \mathcal{E}_d (или амплитудными I_0, U_0, \mathcal{E}_0). Так, при последовательном соединении сумма напряжений на отдельных участках замкнутой цепи оказывается не равной электродвижущей силе (см. задачу № 21-3), а при параллельном — сумма токов в ветвях не равна току в неразветвленной части цепи (задача № 21-4). Величины I, U, \mathcal{E} , определяющие электрические процессы во всей цепи и на ее отдельных участках, совершают гармонические колебания, находясь в различных фазах [см. формулу (21.9)]. Поэтому напряжения (и токи) складываются по правилу сложения векторных величин с учетом угла (разности фаз) между ними точно так же, как складываются, например, амплитуды смещения при механических колебаниях равных периодов [см. формулу (19.5)].

Решение задач

21-1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 5,0 \text{ мКФ}$ и катушки индуктивностью $L = 0,200 \text{ Г.}$ Определить максимальную силу тока I_0 в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_0 = 90 \text{ В.}$ Сопротивлением контура R пренебречь.

Решение. Рассмотрим два способа решения задачи. Первый из них основан на исследовании уравнения свободных электромагнитных колебаний (21.1), второй — на законе сохранения энергии.

1. Если в колебательном контуре сопротивление R пренебрежимо мало, то в уравнении (21.1), выражающем заряд конденсатора как функцию времени, можно положить коэффициент затухания $\beta = 0.$ Тогда, согласно (21.3), получим $\omega = \omega_0.$ Следовательно, в контуре будут незатухающие колебания, при этом

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1)$$

Сила тока есть производная от заряда по времени. Поэтому, дифференцируя обе части (1) по времени, получим для силы тока в контуре уравнение

$$I = \omega_0 q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Величина $I_0 = \omega_0 q_0$ является амплитудным, т. е. максимальным, значением тока в контуре. Подставив значение ω_0 из формулы (21.4) и учтяв соотношение $q_0 = CU_0,$ определим искомую величину:

$$I_0 = \omega_0 q_0 = V \sqrt{1/LC} CU_0 = U_0 \sqrt{C/L}.$$

2. В процессе незатухающих электромагнитных колебаний полная электромагнитная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора $CU^2/2$ и магнитного поля катушки $LI^2/2,$ остается постоянной. При этом в те моменты, когда конденсатор максимально заряжен ($U = U_0$), сила тока равна нулю. Следовательно, полная энергия контура

$$W = CU_0^2/2. \quad (2)$$

В то время, когда конденсатор разряжен ($U = 0$), сила тока достигает максимального значения $I_0.$ Тогда полная энергия контура

$$W = LI_0^2/2. \quad (3)$$

Приравняв правые части формул (2), (3), найдем

$$I_0 = U_0 \sqrt{C/L}.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $C = 5,0 \cdot 10^{-6} \Phi,$ $L = 0,200 \text{ Г.},$ $U_0 = 90 \text{ В.}$ и произведя вычисление, получим

$$I_0 = 0,45 \text{ А.}$$

21-2. Добротность колебательного контура $Q = 5,0$. Определить, на сколько процентов отличается частота ω свободных колебаний контура от его собственной частоты ω_0 .

Решение. Во всяком реальном колебательном контуре, обладающем сопротивлением R , частота свободных электромагнитных колебаний ω меньше собственной частоты контура ω_0 (т. е. частоты колебаний при $R \rightarrow 0$). В задаче требуется найти величину

$$x = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 1 - \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (1)$$

Добротность контура выразим через величины ω , ω_0 , используя формулы (21.6), (21.5), (21.3) и соотношение $T = 2\pi/\omega$:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{2\sqrt{\omega^2 - \omega^4}}. \quad (2)$$

Введя обозначение $\alpha = \omega/\omega_0$, из (2) имеем

$$Q^2 = \frac{\omega^2}{4(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\alpha^2}{4(1 - \alpha^2)}.$$

Определив отсюда величину α , на основании (1) найдем

$$x = 1 - \alpha = 1 - 2Q/\sqrt{1 + 4Q^2}. \quad (3)$$

Переходя к вычислению, учтем, что в данном случае $4Q^2 \gg 1$. Поэтому формулу (3) можно упростить. Разделив числитель и знаменатель на $2Q$ и применяв формулы приближенного вычисления, получим

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/4Q^2}} \approx 1 - \frac{1}{1 + 1/8Q^2} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) = \\ &= \frac{1}{8Q^2} = 0,50 \cdot 10^{-2}, \text{ или } x = 0,50 \%. \end{aligned}$$

21-3. В цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора сопротивлением $R = 20$ Ом, катушки индуктивностью $L = 1,0$ мГ и конденсатора емкостью $C = 0,10$ мкФ, действует синусоидальная э. д. с. \mathcal{E} (рис. 21-1). Определить частоту ω э. д. с., при которой в цепи наступит резонанс. Найти также действующие значения силы тока I и напряжений U_R , U_L , U_C на всех элементах цепи при резонансе, если при этом действующее значение э. д. с. $\mathcal{E} = 30$ В.

Решение. Под действием переменной э. д. с. в данной цепи, представляющей собой колебательный контур, устанавливаются вынужденные электромагнитные колебания. При этом амплитудные значения тока I_0 и э. д. с. \mathcal{E}_0 связаны соотношением (21.8). Из формул (21.11)

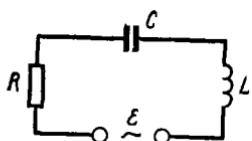


Рис. 21-1

видно, что между действующими значениями тока I_d и э. д. с. \mathcal{E}_d существует то же соотношение, что и между величинами I_0 , \mathcal{E}_0 . Поэтому (опуская для простоты индексы у величин I_d , \mathcal{E}_d) запишем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}. \quad (1)$$

Очевидно, максимальному току при резонансе $I_{\text{рез}}$ соответствует такое значение ω , при котором выражение, стоящее в скобках в формуле (1), обратится в нуль. Отсюда определим резонансную циклическую частоту*:

$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{1/LC} = 1,0 \cdot 10^6 \text{ рад/с.} \quad (2)$$

При этом сила тока равна

$$I_{\text{рез}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1,5 \text{ А.}$$

Зная силу тока $I_{\text{рез}}$, найдем действующие значения напряжения на каждом из элементов контура R , L , C , применив закон Ома для каждого из этих участков:

$$U_R = I_{\text{рез}} R = \mathcal{E} = 30 \text{ В,}$$

$$U_L = I_{\text{рез}} L \omega = \mathcal{E} L \omega / R = 150 \text{ В;}$$

$$U_C = I_{\text{рез}} (1/C\omega) = U_L = 150 \text{ В.}$$

Равенство $U_C = U_L$ следует из равенства емкостного и индуктивного сопротивлений при резонансе.

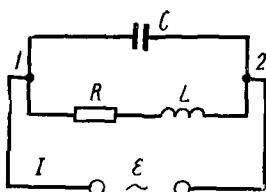


Рис. 21-2

Решение. Эта цепь отличается от предыдущей (рис. 21-1) способом включения источника переменной э. д. с. (внутренним сопротивлением которого мы пренебрегаем). Если раньше все элементы цепи были включены последовательно, то в данном случае имеем разветвленную цепь переменного тока. Участок 1-2 является параллельным соединением двух ветвей, одна из которых содержит конденсатор C , а другая — элементы R , L , соединенные последовательно между собой. Каждая из ветвей вместе с источником э. д. с. образует колебательный (пенопольный) контур. Поэтому силу тока в каждой ветви снова найдем по формуле (21.8), заменив амплитудные величины I_0 , \mathcal{E}_0 их

* Соотношение (2) можно также получить сразу из условия резонанса (21.10).

действующими значениями I , \mathcal{E} . Тогда для силы тока в ветви $IC2$, где $R = 0$, $L = 0$, получим

$$I_C = \frac{\mathcal{E}}{1/C\omega} = C\omega = 0,33 \text{ A.} \quad (1)$$

В ветви $IRL2$, где отсутствует емкостное сопротивление $1/C\omega$, сила тока с учетом соотношения $R^2 \ll L^2\omega^2$ равна

$$I_{RL} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \approx \frac{\mathcal{E}}{L\omega} = 0,30 \text{ A.} \quad (2)$$

Если бы переменные токи в обеих ветвях имели одинаковые фазы, то сила тока в неразветвленной части цепи была бы равна сумме сил токов I_C , I_{RL} . Однако эти токи имеют различные фазы: между каждым из них и э. д. с. \mathcal{E} существует сдвиг фаз, определяемый формулой (21.9). Применим эту формулу для каждой ветви. Для ветви $IC2$ $R = 0$, $L = 0$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi_C = -\infty; \quad \varphi_C = -\pi/2.$$

Для ветви $IRL2$, учитывая, что $1/C\omega = 0$, получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_{RL} = L\omega/R = 100; \quad \varphi_{RL} \approx \pi/2.$$

В формуле (21.7) величина φ стоит со знаком «—»; это означает, что ток I_C опережает по фазе э. д. с. \mathcal{E} на $\pi/2$, а ток I_{RL} отстает по фазе от э. д. с. \mathcal{E} на $\pi/2$.

На рис. 21-3 изображена векторная диаграмма, построенная в соответствии с полученными фазовыми соотношениями. Сложив векторы, изображающие токи I_C и I_{RL} , найдем вектор, изображающий ток I в неразветвленной части цепи. Таким образом,

$$I = I_C - I_{RL} = 0,03 \text{ A.} \quad (3)$$

Такой же результат можно получить с помощью формулы (19.5), положив в ней $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$.

Замечание. В данной задаче величины R , L , ω были связаны соотношением $R \ll L\omega$. Именно поэтому переменные токи в параллельных ветвях оказались в противоположных фазах ($\Delta\varphi \approx \pi$). Если при этом величины ω , C , L оказались бы связанными соотношением (21.10), то, как это видно из формул (1), (2), величины I_C , I_{RL} приблизительно одинаковы и, согласно формуле (3), $I = I_C - I_{RL} \approx 0$. Точнее: при $R \rightarrow 0$ $I \rightarrow 0$ и, следовательно, полное сопротивление переменному току всего участка $1-2 R_{1,2} \rightarrow \infty$. Это **резонанс токов** (в отличие от **резонанса напряжений**, рассмотренного в задаче № 21-3). Таким образом, при наличии неравенства $R \ll L\omega$ условие резонанса токов совпадает с условием резонанса напряжений (21.10).

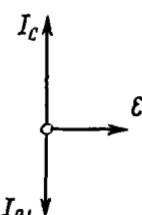


Рис. 21-3

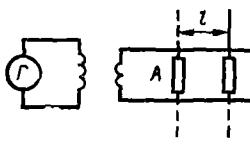


Рис. 21.4

21-5. Два параллельных провода, погруженные в бензол, индуктивно соединены с генератором Γ высокочастотных электромагнитных колебаний (рис. 21-4). При частоте $v = 1,00 \cdot 10^2$ Гц в системе устанавливаются стоячие электромагнитные волны. Перемещаясь вдоль проводов газоразрядную трубку A , по ее свечению определяют положения пучностей напряженности электрического поля. Расстояние между соседними пучностями оказалось равным $l = 1,00$ м. Найти диэлектрическую проницаемость бензола.

Решение. Стоячие электромагнитные волны возникают в результате интерференции волн, распространяющихся по двухпроводной линии от генератора в прямом направлении, с волнами, отраженными от конца линии (ср. с задачей № 20-3). Учтем, что при данной высокой частоте электромагнитных колебаний основные процессы, связанные с распространением электромагнитных волн вдоль линии, происходят не в проводах, а в окружающей их среде*.

По теории Максвелла, скорость электромагнитных волн в среде связана с их скоростью в вакууме формулой (21.12). Отсюда, учитывая, что для бензола $\mu \approx 1$, найдем его диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon = c^2/v^2.$$

Скорость электромагнитных волн связана с длиной волны λ и частотой v соотношением $v = \lambda v$. Поскольку расстояние между соседними пучностями в стоячей волне равно половине длины волны, т. е. $\lambda = 2l$, то получим

$$\epsilon = \frac{c^2}{v^2} = \frac{c^2}{\lambda^2 v^2} = \frac{c^2}{4l^2 v^2}.$$

Подставив числовые значения величин: $c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с, $l = 1,00$ м, $v = 1,00 \cdot 10^2$ Гц — и выполнив вычисление, найдем $\epsilon = 2,2$.

21-6. Определить энергию, которую переносит за время $t = 1,00$ мин плоская синусоидальная электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, через площадку $S = 10,0$ см², расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 1,00$ мВ/м. Период волны $T \ll t$.

Решение. Энергия, переносимая электромагнитной волной за единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга P . Учитывая, что в электромагнитной волне $E \perp H$, получим для модуля вектора P согласно (21.13)

$$P = EH. \quad (1)$$

* Вследствие скин-эффекта переменный ток частоты $v = 10^8$ Гц течет практически лишь по поверхности проводов.

Поскольку обе величины E , H , характеризующие электромагнитную волну, в каждой ее точке меняются во времени по закону синуса, находясь в одинаковых фазах, соотношение (1) можно записать так:

$$P = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t = E_0 H_0 \sin^2 \omega t. \quad (2)$$

Таким образом, величина P является функцией времени, и формулы (1), (2) дают лишь *мгновенное* значение величины P . Поэтому, согласно определению вектора плотности потока энергии, запишем

$$P = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{S}.$$

Отсюда энергия dW , переносимая волной через площадку S за время dt , с учетом формулы (2), равна

$$dW = P S dt = E_0 H_0 S \sin^2 \omega t dt. \quad (3)$$

Здесь неизвестна величина H_0 . Воспользуемся тем, что между величинами E , H , характеризующими электромагнитную волну в *одной и той же точке*, существует простое соотношение. Его найдем, учитывая, что, согласно теории электромагнитных волн, плотности энергии электрического и магнитного полей волны в любой момент времени равны, т. е.

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = -\frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (4)$$

Так как, по условию, $\epsilon = \mu = 1$, то из (4) получим

$$H = E \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}.$$

Так же связаны между собой амплитудные значения H_0 , E_0 . Тогда уравнение (3) примет вид

$$dW = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_0^2 S \sin^2 \omega t dt.$$

Отсюда полная энергия, переносимая волной за время t ,

$$W = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \int_0^t \sin^2 \omega t dt = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right). \quad (5)$$

Так как циклическая частота ω неизвестна, воспользуемся данным в условии неравенством $T \ll t$ для оценки значения дроби $(\sin 2\omega t)/4\omega$. Учитывая соотношение $\omega = 2\pi/T$, имеем

$$\frac{\sin 2\omega t}{4\omega} = \frac{1}{8\pi} T \sin \left(\frac{4\pi t}{T} \right) \leqslant \frac{T}{8\pi}.$$

Теперь ясно, что в силу неравенства $T \ll t$ членом $(\sin 2\omega t/4\omega)$ в формуле (5) можно пренебречь. Тогда получим

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S t.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ Г/м, $S = 10,0 \cdot 10^{-4}$ м², $t = 60$ с, $E_0 = 1,00 \cdot 10^{-9}$ В/м, и выполнив вычисление, найдем

$$W = 8,0 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$