Глава 7
ОПТИКА

§ 22. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА И ФОТОМЕТРИЯ

Основные формулы

При прохождении света через границу раздела двух сред выполняется закон преломления:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (22.1)$$

где i — угол падения, r — угол преломления, n_{21} — постоянная для данных двух сред величина, называемая показателем преломления (относительным) второй среды относительно первой, n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред, т. е. их показатели преломления относительно вакуума

При преломлении света на сферической поверхности, разделяющей две среды с показателями преломления n_1 и n_2, выполняется соотношение

$$\frac{n_2}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \qquad (22.2)$$

где a_1, a_2, R — расстояния от вершины поверхности до светящейся точки ее изображения и центра сферы. Здесь соблюдается *правило знаков*: каждое из расстояний a_1, a_2, R берется со знаком «+», если оно отсчитывается по направлению распространения света, и со знаком «—» в противоположном случае

Для плоской поверхности ($R = \infty$)

$$\frac{a_1}{n_1} = \frac{a_2}{n_2}. \qquad (22.3)$$

Формула тонкой линзы

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f} = \Phi, \qquad (22.4)$$

где a_1, a_2 — расстояния от оптического центра линзы до светящейся точки и ее изображения; f, Φ — фокусное расстояние линзы и ее оптическая сила Для собирающих линз $\Phi > 0$, $f > 0$, для рассеивающих $\Phi < 0$, $f < 0$.

Оптическая сила тонкой линзы выражается через радиусы кривизны ее поверхностей R_1, R_2 и показатели преломления вещества линзы $n_л$ и окружающей среды $n_{ср}$ соотношением

$$\Phi = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad (22.5)$$

В формулах (22.3)—(22.5) к величинам a_1, a_2, R_1, R_2 применяется то же правило знаков, что и в (22.2).

Оптическая сила системы, состоящей из двух тонких сложенных вплотную линз, равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \qquad (22.6)$$

где Φ_1, Φ_2 — оптические силы линз.

Увеличение оптического прибора, вооружающего глаз,

$$\Gamma = \frac{l}{l_0} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \tag{22.7}$$

где l, l_0 — линейные размеры изображения на сетчатке вооруженного и невооруженного глаза; φ, φ_0 — углы зрения, под которыми глаз видит предмет через прибор и без него.

Увеличение телескопа

$$\Gamma = f_{об}/f_{ок}, \tag{22.8}$$

где $f_{об}$, $f_{ок}$ — фокусные расстояния объектива и окуляра.

Световым потоком называется поток излучения (т. е. энергия, переносимая через данную площадку за единицу времени), оцениваемый по зрительному ощущению:

$$\Phi = dW/dt. \tag{22.9}$$

Сила света источника равна отношению светового потока, излучаемого в данном направлении, к телесному углу, в котором он распространяется:

$$I = d\Phi/d\omega. \tag{22.10}$$

Освещенность измеряется отношением светового потока, падающего на поверхность, к ее площади:

$$E = d\Phi/dS. \tag{22.11}$$

Освещенность поверхности, создаваемая источником силой света I в точке, удаленной от него на расстояние r, выражается формулой

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}, \tag{22.12}$$

где α — угол падения лучей.

Светимость R измеряется световым потоком, излучаемым единицей площади светящейся поверхности. Если светимость тела обусловлена его освещенностью, то выполняется соотношение

$$R = \rho E, \tag{22.13}$$

где ρ — коэффициент рассеяния (отражения), показывающий, какая доля светового потока, упавшего на поверхность данного тела, рассеивается им.

Яркость равна отношению силы света dI источника в данном направлении к площади dS_n проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную этому направлению (т. е. к площади видимой светящейся поверхности):

$$B = \frac{dI}{dS_n} = \frac{dI}{dS \cos \varphi}, \tag{22.14}$$

где φ — угол между нормалью к элементу поверхности dS и данным направлением.

Если тело излучает по закону Ламберта, согласно которому яркость не зависит от направления, то светимость и яркость связаны соотношением

$$R = \pi B. \tag{22.15}$$

А. ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Методические указания

1. Задачи, в которых требуется определить ход светового луча при наличии одной или нескольких преломляющих плоскостей (например, ход луча через призму), решают с помощью закона преломления (22.1), применяя его поочередно к каждому случаю преломления

на границе двух сред и используя геометрические соотношения, вытекающие из условия задачи. Если, по условию, луч падает на границу двух сред со стороны оптически более плотной среды ($n_1 > n_2$), то вычисления могут дать значения синуса угла преломления больше единицы. Это будет означать, что луч не преломляется на данной границе, а полностью отражается от нее.

2. Решая задачи, в которых требуется найти изображение светящейся точки, получаемое в результате преломления на плоской поверхности, следует помнить, что при этом гомоцентричность световых пучков*, вообще говоря, не сохраняется. Так, продолжения трех преломленных лучей *1*, *2*, *3* пересекаются в точках *A*, *B*, *C* (рис. 22-1).

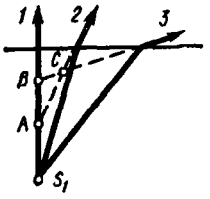

Рис. 22-1

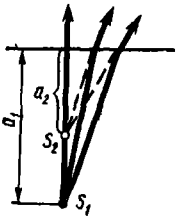

Рис. 22-2

Здесь не существует такой единственной точки S_2, которая являлась бы изображением светящейся точки S_1. В случае же узких световых пучков, падающих нормально на границу двух сред (рис. 22-2), их гомоцентричность сохраняется. Расстояния от светящейся точки S_1 и ее мнимого изображения S_2 до преломляющей плоскости связаны формулой (22.3). Одинаковые знаки величин a_1, a_2 показывают, что точки S_1 и S_2 лежат всегда по одну сторону преломляющей плоскости.

С помощью формулы (22.3) можно также найти изображение при наличии нескольких параллельных плоскостей, разделяющих среды с различными показателями преломления. В таких случаях изображение, образованное при первом преломлении, принимают за предмет и по формуле (22.3) находят новое изображение, полученное при следующем преломлении.

Решение задач

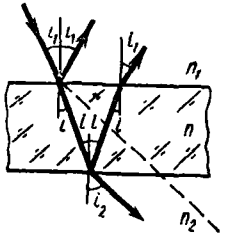

Рис. 22-3

22-1. Две среды разделены плоскопараллельной пластинкой (рис. 22-3). Показатели преломления первой среды, второй среды и пластинки соответственно равны n_1, n_2, n ($n > n_1$). Луч света падает из первой среды на пластинку под углом i_1. Определить угол i_2, под которым луч выйдет из пластинки.

* Гомоцентрическим называется пучок лучей, пересекающихся в одной точке.

Решение. Проходя через пластинку, световой луч дважды преломляется на ее гранях согласно закону (22.1). В случае падения света на границу первой среды с пластинкой имеем

$$n_1 \sin i_1 = n \sin i, \tag{1}$$

а при падении света на границу пластинки со второй средой

$$n \sin i = n_2 \sin i_2. \tag{2}$$

Из равенств (1), (2) получаем

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \tag{3}$$

Таким образом, искомый угол i_2 определяется соотношением

$$\sin i_2 = n_1 \sin i_1 / n_2. \tag{4}$$

Если $n_1 > n_2$, то может оказаться, что $\sin i_2$, вычисленный по (4), превысит единицу. Это будет означать, что луч не выйдет во вторую среду, а *полностью отразится* от границы пластинки со второй средой. Легко видеть, что при этом луч снова окажется в первой среде, выйдя из пластинки под углом i_1.

Замечание. Очевидно, равенства (3), (4) остались бы в силе, если убрать пластинку и привести две среды в непосредственный контакт. Следовательно, введение пластинки не меняет направления луча во второй среде, он только несколько смещается (на рис. 22-3 пунктиром изображен ход преломленного луча, если бы пластинки не было). При достаточно малой толщине пластинки этим смещением можно пренебречь. В этом случае пластинка (или тонкий слой) вообще не влияет на геометрический ход лучей*.

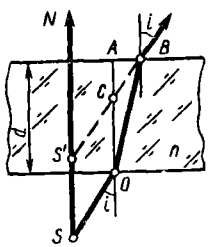

Рис. 22-4

22-2. Наблюдатель рассматривает светящуюся точку через плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n = 1{,}5$) толщиной $d = 3{,}0$ см так, что луч зрения нормален к пластинке. Определить расстояние между точкой S и ее изображением S' (рис. 22-4).

Решение. В глаз наблюдателя попадает световой пучок, лучи которого образуют между собой весьма малые углы. Продолжения этих лучей пересекаются в одной точке S', являющейся изображением светящейся точки S.

Пусть два луча выходят из точки S и попадают в глаз. Один из из них — луч SN — падает на пластинку нормально. Другой — луч

* Это не относится к интенсивности света в отраженных и преломленных световых пучках. Здесь тонкая пластина (тонкий слой) играет существенную роль из-за явления интерференции света.

SO — падает под произвольным весьма малым углом i. Этот луч, дважды преломившись, выйдет из пластинки параллельно отрезку SO. Чтобы определить положение точки S', в которой пересекутся продолжения этих двух лучей, проведем отрезок OA, параллельный лучу SN. Из параллелограмма $SS'CO$ следует

$$SS' = OC = d - h. \qquad (1)$$

При этом отрезок $h = AC$ можно выразить через величины d, n. Для этого заметим, что, если бы в точке O находился источник света, его изображением явилась бы точка C, так как здесь пересекались бы лучи, выходящие из точки O, после преломления на верхней грани пластинки. Следовательно, применив формулу (22.3), где $a_1 = AO = d$, $a_2 = AC = h$, $n_1 = n$, $n_2 = 1$ (воздух), получим

$$h = d/n. \qquad (2)$$

Подставив это значение h в (1), найдем

$$SS' = (n - 1)\, d/n = 1{,}0 \text{ см}.$$

Как видно из чертежа, изображение S' смещено относительно предмета S на 1,0 см в сторону наблюдателя

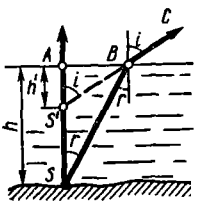

Рис. 22-5

22-3 Человек, стоящий на берегу пруда, смотрит на камень, находящийся на дне. Глубина пруда $h = 1{,}00$ м. На каком расстоянии h' от поверхности воды увидит человек камень, если луч зрения составляет с вертикалью угол $i = 60°$?

Решение. Восприятие глубины пространства, т. е. расстояния до рассматриваемого объекта, обусловлено зрением двумя глазами. Наблюдение светящейся точки одним глазом не дает ощущения глубины, а позволяет лишь судить о том, в каком направлении находится точка. При наблюдении двумя глазами светящаяся точка кажется расположенной там, где пересекаются лучи зрения, соответствующие обоим глазам наблюдателя.

Но лучи, выходящие из какой-либо точки S камня, после преломления на поверхности воды уже не образуют гомоцентрического пучка: продолжения разных пар лучей пересекаются в различных точках S'. Следовательно, кажущаяся глубина пруда зависит от расположения глаз.

Полагая, что оба глаза стоящего человека находятся на одной *горизонтали*, можно найти положение точки S'. Пусть луч BC (рис. 22-5) попадает в один глаз наблюдателя. Чтобы этот луч попал в другой глаз, надо повернуть весь чертеж вокруг вертикали N на некоторый угол, зависящий от расстояния между глазами. После поворота продолжение луча BC пересечет вертикаль в той же точке, что

и до поворота. Следовательно, эта точка и является искомой точкой S' — видимым изображением точки S.

Из чертежа следует:

$$AB = h \operatorname{tg} r = h' \operatorname{tg} i.$$

Отсюда, учитывая, что показатель преломления воды $n = \sin i / \sin r$, получим

$$h' = h \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = h \left(\frac{\sin r}{\cos r} : \frac{\sin i}{\cos i} \right) = \frac{h}{n} \frac{\cos i}{\sqrt{1 - (\sin^2 i)/n^2}}. \qquad (1)$$

Подставив в формулу числовые значения величин (для воды $n = 1{,}33$), найдем

$$h' = 0{,}50 \text{ м}$$

Замечания: 1. Если луч зрения направить по нормали к поверхности воды, т. е. если $i = 0$, то из формулы (1) следует: $h' = h/n$, что совпадает с результатом (2) предыдущей задачи При $i \to \pi/2$ получим $h' \to 0$.

2. Если оба глаза и точка S будут расположены в одной *вертикальной плоскости*, точка S' окажется в ином месте. На рис. 22-1 ей соответствует точка C, если лучи *2* и *3* попадают в глаза наблюдателя. В этом случае, считая угол между лучами весьма малым, так что $i_1 \approx i_2 \approx i$, можно прийти к соотношению

$$h' = \frac{h}{n} \left(\frac{\cos i}{\sqrt{1 - (\sin^2 i)/n^2}} \right)^3. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2), совпадая в предельных случаях (при $i = 0$ получим $h' = h/n$, при $i = \pi/2$ имеем $h' = 0$), в промежуточных случаях дают существенно различные результаты.

6. ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Методические указания

1 При преломлении света на сферических поверхностях только параксиальные пучки (т. е. пучки, все лучи которых составляют достаточно малые углы с главной оптической осью) сохраняют гомоцентричность Во всех задачах п. 6 пучки света предполагаются параксиальными.

2. В учебной литературе соотношения (22.2), (22.4) и (22.5) часто записывают иначе:

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}; \qquad (22.2a)$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f} = \Phi, \qquad (22.4a)$$

$$\Phi = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \qquad (22.5a)$$

Эти формулы дают правильный результат, если пользоваться следующим правилом знаков, справедливым только для них:

1) расстояния a_1, a_2 и f, отсчитываемые от вершины преломляющей поверхности (или от оптического центра тонкой линзы) до светящейся точки, ее изображения и главного фокуса линзы, считают положительными, если эти точки действительные. Если предмет, изображение или главный фокус — мнимые, то соответствующие расстояния считают отрицательными;

2) в формуле (22.2а) полагают $R > 0$, если поверхность обращена навстречу лучу выпуклой стороной, и $R < 0$, если — вогнутой;

3) в формуле (22.5а) радиус выпуклой поверхности берется со знаком «+», а радиус вогнутой — со знаком «—».

В данном пособии при решении задач формулы для сферической поверхности и линзы записаны только в форме (22.2)—(22.5) с соблюдением соответствующего этим формулам правила знаков (см. стр. 246).

3. Формулы (22.4) и (22.5) имеют смысл лишь для случаев, когда по обе стороны линзы находится одна и та же среда. Это относится и к формуле (22.6): система сложенных вплотную линз должна быть окружена одной средой; если при этом между линзами имеется зазор (например, в случае двух двояковыпуклых линз), он также должен быть заполнен этой средой. Если по обе стороны линзы (или системы линз) расположены различные среды, всегда можно найти положение изображения с помощью формулы (22.2), поочередно применяя ее для каждой сферической поверхности (см. задачу № 22-6).

Решение задач

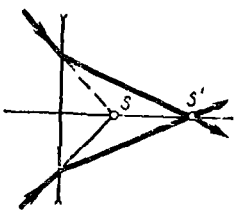

Рис 22 6

22-4. На тонкую двояковогнутую линзу с оптической силой $\Phi = -5{,}0$ дп падает сходящийся пучок лучей, продолжения которых пересекаются за линзой в точке S, лежащей на главной оптической оси на расстоянии 12,0 см от линзы. Где находится точка пересечения лучей после их преломления в линзе?

Решение. Из соображений симметрии ясно, что искомая точка S' должна лежать на главной оптической оси. Чтобы применить формулу линзы (22.4), будем считать S *светящейся точкой* (в данном случае — мнимой). Тогда точка S' будет изображением светящейся точки S. Искомое расстояние определим по формуле (22.4):

$$a_2 = a_1/(1 + \Phi a_1). \qquad (1)$$

Выразив a_1 в метрах и учитывая, что расстояние от линзы до точки S отсчитывается в задаче по ходу лучей, получим $a_1 = 0{,}12$ м. Выполнив вычисление по формуле (1), найдем

$$a_2 = 0{,}30 \text{ м}.$$

Знак ответа показывает, что точка S' находится справа от линзы (рис. 22-6). Следовательно, точка S' — действительное изображение мнимой точки S.

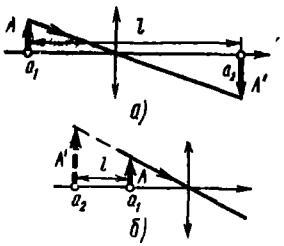

Рис. 22-7

22-5. Каково наименьшее возможное расстояние между предметом и его изображением в собирающей линзе с фокусным расстоянием f?

Решение. На рис. 22-7, *а* представлено действительное изображение A' предмета A, а на рис. 22 7, *б* — мнимое. Величины a_1, a_2, входящие в формулу линзы (22.4), являются, по существу, координатами предмета и изображения на числовой оси, совпадающей с оптической осью линзы. При этом за начало отсчета принят оптический центр линзы, а положительное направление отсчета совпадает с направлением распространения света. Поэтому расстояние между предметом и изображением, отсчитанное вдоль этой оси, как величина существенно положительная, равно:

для случая *а* $\quad l = a_2 - a_1;$ (1)

для случая *б* $\quad l = a_1 - a_2.$ (2)

В уравнениях (1), (2) l — функция двух переменных a_1, a_2. Чтобы выразить l как функцию одной переменной, воспользуемся формулой (22.4). Тогда, исключив величину a_1, получим

$$l = \pm \frac{a_2^2}{a_2 - f}, \tag{3}$$

где знак «+» соответствует действительному изображению, а знак «—» — мнимому. Теперь применим обычный метод исследования функции на экстремум. Продифференцируем выражение (3) по переменной a_2 и приравняем нулю производную:

$$\frac{dl}{da_2} = \pm \frac{a_2(a_2 - 2f)}{(a_2 - f)^2} = 0. \tag{4}$$

Здесь смысл знаков «+» и «—» перед дробью тот же, что в (3).

Уравнение (4) имеет два корня:

$$1)\ a_2 = 0; \qquad 2)\ a_2 = 2f.$$

Если изображение действительное, то согласно (3) должно выполняться неравенство $a_2 > f$. Поэтому первый корень отбрасываем. Подставив значение второго корня в формулу (3), найдем

$$l_{\text{мин}} = 4f. \tag{5}$$

Если изображение мнимое, то величина $a_2 \leqslant 0$. Поэтому теперь отбрасываем второй корень. Подставив значение $a_2 = 0$ в формулу (3), получим

$$l_{\text{мин}} = 0.$$

Это соответствует случаю, когда предмет приближен вплотную к линзе и его мнимое изображение совпадает с ним.

В том, что значения a_2, полученные при решении уравнения (4), определяют минимальное, а не максимальное значение l, можно убедиться, выяснив знак второй производной:

$$\frac{d^2 l}{da_2^2} = \pm \frac{2f^2}{(a_2 - f)^3}.$$

Стоящие перед дробью знаки «+» и «—» соответствуют неравенствам $a_2 > f$ и $a_2 < f$, поэтому в любом случае имеет место $d^2l/da_2^2 > 0$ и, следовательно, выполняется условие минимума функции $l = l(a_2)$

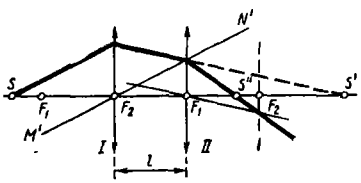

Рис. 22 8

22-6. Светящаяся точка S находится на главной оптической оси центрированной системы двух тонких линз на расстоянии 40,0 см от первой линзы (рис. 22-8). Расстояние между линзами $l = 30{,}0$ см. Где получится изображение точки, если фокусное расстояние каждой из них $f = 30{,}0$ см? Решить задачу построением и вычислением.

Решение. На рис. 22-8 точка S' — изображение светящейся точки S, созданное линзой I; S'' — искомая точка, которая найдена как изображение точки S', созданное линзой II. Здесь дважды применен способ построения преломленного луча, основанный на том, что все лучи параллельного пучка после преломления в линзе собираются в точке, лежащей на пересечении побочной оси $M'N'$ с фокальной плоскостью.

Чтобы вычислить координату точки S'' на оптической оси, применим к каждой линзе формулу (22.4). Для линзы I получим

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}, \tag{1}$$

где a_2 — расстояние от линзы I точки S' (ее координата). Для линзы II координата точки S', рассматриваемой теперь в качестве предмета, выразится величиной $a_2 - l$ независимо от того, по какую сторону от линзы II расположена точка S'. Следовательно,

$$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2 - l} = \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Здесь a_3 — расстояние от линзы II до точки S'' (ее координата).

Исключив из уравнений (1), (2) величину a_2 и учитывая, что $a_1 = -40{,}0$ см, получим

$$a_3 = \frac{(a_1 f - a_1 l - fl) f}{f^2 + 2a_1 f - fl - a_1 l} = 22 \text{ см}.$$

Знак величины a_3 в ответе показывает, что точка S'' расположена на расстоянии 22 см по ходу луча (т. е. справа) от линзы II.

22-7. Тонкая стеклянная ($n = 1{,}5$) двояковыпуклая линза с одинаковыми радиусами кривизны, равными 17,0 см, разделяет две среды с показателями преломления $n_1 = 1{,}33$ и $n_2 = 1{,}40$. Со стороны первой среды на линзу падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси. На каком расстоянии от линзы пересекутся преломленные лучи?

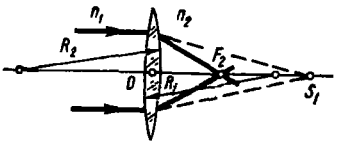

Рис. 22-9

Решение. Искомое расстояние является задним фокусным расстоянием линзы (отрезок OF_2 на рис. 22-9). Здесь нельзя применить формулу оптической силы линзы (22.5), относящуюся лишь к случаю, когда с обеих сторон линзы находится одна и та же среда. Для решения задачи воспользуемся формулой (22.2), применив ее поочередно к обеим поверхностям линзы. Для первой (левой) поверхности имеем

$$\frac{n}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n - n_1}{R_1}, \qquad (1)$$

где a_2 — расстояние от линзы до точки S', в которой пересеклись бы лучи, если бы не было второй поверхности. Приняв точку S' за мнимый предмет, запишем формулу (22.2) для второй сферической поверхности:

$$\frac{n_2}{a_3} - \frac{n}{a_2} = \frac{n_2 - n}{R_2}, \qquad (2)$$

где $a_3 = OF_2$ — искомое расстояние. Сложив почленно уравнения (1), (2) и учитывая, что для параллельного пучка света $a_1 = -\infty$, получим

$$\frac{n_2}{a_3} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n}{R_2}. \qquad (3)$$

Запишем, соблюдая правило знаков, числовые значения величин, входящих в (3): $R_1 = 17{,}0$ см, $R_2 = -17{,}0$ см. Выполнив вычисление, найдем

$$a_3 = 88 \text{ см}.$$

Замечание. Если параллельный пучок лучей падает на линзу с противоположной стороны, то, обозначив через a_3' расстояние от линзы до точки пересечения преломленных лучей (т. е. переднее фокусное расстояние линзы OF_1) и повторив все рассуждения, будем иметь

$$\frac{n_1}{a_3'} = \frac{n_1 - n}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}. \qquad (4)$$

Учитывая, что теперь свет распространяется справа налево, убедимся, что в соответствии с правилом знаков правые части формул (3) и (4) одинаковы. Значит,

$$\frac{a_3}{a_3'} = \frac{OF_2}{OF_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Таким образом, фокусные расстояния линзы, по обе стороны которой *различные* среды, пропорциональны показателям преломления этих сред.

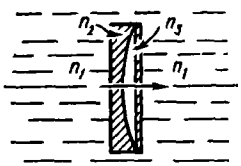

Рис. 22 10

22-8. Тонкая стеклянная плосковогнутая линза, радиус кривизны которой $R = 0{,}20$ м, плотно закрыта тонкой стеклянной пластинкой и погружена в воду (рис. 22-10). Определить оптическую силу такой системы.

Решение. Из замечания к задаче № 22-1 следует, что тонкая стеклянная пластинка практически не влияет на ход световых лучей. Поэтому можно считать, что пластинки нет, а вода и воздух граничит между собой непосредственно

Существует несколько способов решения задача. Один из них основан на том, что, поочередно применив формулу (22 2) для всех трех преломляющих поверхностей, можно найти фокусное расстояние системы (точно так же, как это мы сделали в предыдущей задаче), а значит, и ее оптическую силу.

Применим здесь другой способ, рассматривая нашу систему как две сложенные вплотную тонкие линзы: одна из них — плосковогнутая стеклянная, другая — плосковыпуклая воздушная. Пусть $\Phi_{ст}$, $\Phi_{возд}$ — оптические силы этих линз. Тогда на основании формулы (22.6) оптическая сила системы

$$\Phi = \Phi_{ст} + \Phi_{возд}. \qquad (1)$$

С помощью формулы (22.5) определим оптические силы обеих линз, считая, что каждая из них находится в воде. Пусть n_1, n_2, n_3 — коэффициенты преломления воды, стекла и воздуха соответственно. Выбрав положительное направление отсчета (направление луча) вправо, получим

$$\Phi_{ст} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right), \quad \Phi_{возд} = \left(\frac{n_3}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right). \qquad (2)$$

Из формул (1), (2) найдем

$$\Phi = (n_3 - n_2)/n_1 R.$$

Взяв из таблиц $n_1 = 1{,}33$ и $n_2 = 1{,}50$ и выполнив вычисление, получим

$$\Phi = -1{,}9 \text{ дп}.$$

Знак «—» в ответе показывает, что данная система — рассеивающая.

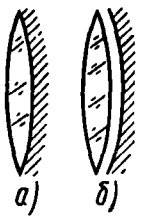

Рис. 22-11

22-9. Светящаяся точка находится на главной оптической оси тонкой стеклянной ($n = 1{,}50$) двояковыпуклой линзы с одинаковыми радиусами кривизны, равными 20 см, на расстоянии 30 см от ее оптического центра. Задняя поверхность линзы посеребрена. Где получится изображение точки?

Решение. Лучи света, падая на линзу, преломляются на ее передней поверхности, отражаются от задней поверхности и снова преломляются на передней (рис. 22-11, *а*). Поэтому можно решить задачу, поочередно применяя формулу (22.2) и известную из школьного курса формулу сферического зеркала, рассматривая каждый раз полученное изображение в качестве предмета, чтобы найти следующее изображение.

Применим другой, быстрее приводящий к цели способ. Он основан на расчете оптической силы данной системы, которую можно заменить другой системой, эквивалентной данной.

Представим, что зеркало отделили от линзы и между ними появился тонкий воздушный слой одинаковой толщины (рис. 22-11, *б*). Рассматривая каждый малый элемент такого слоя как плоскопараллельную пластинку, можно убедиться в том, что наличие этого слоя при его достаточно малой толщине не влияет на ход отраженных световых лучей внутри линзы, так как смещение луча, полученное в результате его прохождения через плоскопараллельную пластинку, пропорционально толщине последней. Следовательно, системы, изображенные на рис. 22-11, *а*, *б*, эквивалентны. Но теперь свет будет проходить через всю линзу, преломляясь на обеих ее поверхностях, затем отражаться от сферического зеркала и, наконец, еще раз проходить через линзу. Пусть $\Phi_л$, $\Phi_з$ — оптические силы линзы и зеркала. Тогда, обобщая формулу (22.6) на случай зеркала, запишем для оптической силы всей системы:

$$\Phi = \Phi_л + \Phi_з + \Phi_л = 2\Phi_л + \Phi_з. \qquad (1)$$

Оптическая сила зеркала $\Phi_з = 2/R$. Оптическую силу линзы вычислим по формуле (22.5), обозначив $n_л = n$ и учитывая, что $n_{ср} = 1$ (воздух):

$$\Phi_л = 2\,(n - 1)/R.$$

Подставив значения $\Phi_л$ и $\Phi_з$ в формулу (1), найдем

$$\Phi = (4n - 2)/R.$$

Теперь, зная Φ и расстояние a_1 от системы до предмета, по формуле (22.4) определим искомое расстояние a_2:

$$a_2 = \frac{a_1 R}{(4n-2)\, a_1 - R}.$$

Подставив числовые значения величин: $a_1 = -30$ см, $R = 20$ см и выполнив вычисление, получим*

$$a_2 = 6 \text{ см}.$$

Знак «+» в ответе показывает, что изображение светящейся точки удалено на 6 см от системы по ходу отраженного луча, т. е. лежит на расстоянии 6 см перед системой.

В. ЭЛЕМЕНТЫ ФОТОМЕТРИИ

Методические указания

1. Основой расчетов освещенности служит закон освещенности (22.12). Он применим лишь для *точечных* источников, поскольку лишь к таким источникам относится понятие силы света. Освещенность, созданная системой точечных источников, равна сумме освещенностей от каждого источника.

Если на поверхность падают лучи не непосредственно от точечного источника, а после преломления в линзе, то для определения освещенности надо найти изображение, даваемое линзой, и затем рассматривать его как светящуюся точку. Силу света I_2 изображения можно определить, зная силу света I_1 источника, из соотношения (22.10). Считая, что линза полностью пропускает падающий на нее световой поток Φ, и ограничиваясь параксиальными пучками, получим,

$$\Phi = I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \qquad (1)$$

где ω_1, ω_2 — телесные углы, в которых распространяются пучки света: падающий на линзу (ω_1) и преломленный (ω_2). Как следует из геометрических соображений, $\omega_1 : \omega_2 = a_2^2 : a_1^2$, где a_1, a_2 — расстояния от линзы до предмета и изображения. Все сказанное в отношении линз применимо и к зеркалам. В частности, плоское зеркало, отражая свет, не меняет телесного угла, в котором распространяется световой поток. Тогда в формуле (1) $\omega_1 = \omega_2$ и, следовательно, $I_1 = I_2$ (при условии, что коэффициент отражения $\rho = 1$).

---

* Для собирающих (вогнутых) зеркал величины R, f, Φ считают положительными, для рассеивающих (выпуклых) — отрицательными.

Постоянство светового потока при преломлении и отражении света можно использовать для определения освещенности также с помощью формулы (22.11). Зная освещенность E линзы (зеркала), а также ее площадь S и площадь S' светового пятна на экране, можно найти освещенность E' экрана из соотношения

$$\Phi = ES = E'S'.$$

2. Характеристикой *протяженных* источников света служит яркость B, определяемая соотношением (22.14). Чтобы найти освещенность, созданную протяженным источником, надо разбить его поверхность на элементарные участки dS. Вычислив с помощью соотношения (22.14) силу света dI каждого участка:

$$dI = BdS_n = B\cos\varphi dS, \qquad (2)$$

и рассчитав по формуле (22.12) освещенность dE, созданную элементом dS, надо проинтегрировать полученное выражение по всей площади источника. Обычно при этом рассматриваются лишь такие случаи, когда все элементы источника имеют одинаковую яркость по всем направлениям; это упрощает вычисления.

Часто протяженный источник не слишком больших размеров с заданной яркостью и площадью светящейся поверхности все же можно считать точечным и применять к нему сразу закон освещенности (22.12), где сила света согласно формуле (2) равна

$$I = B\int dS_n = BS_n.$$

При этом ошибка в расчетах получается незначительной (менее 1%) даже в тех случаях, когда линейные размеры источника достигают 10% расстояния от источника до освещаемой поверхности.

3. Яркость *изображения* протяженного источника света, созданного оптической системой, никогда не может превысить яркость источника, если только изображение и источник находятся в одной и той же среде и изображение рассматривается непосредственно (без экрана). Наличие экрана, на который проектируется изображение, существенно меняет дело (см. задачу № 22-13).

Оптические приборы, вооружающие глаз (лупа, микроскоп, телескоп), дают мнимые изображения. При этом действительное изображение получается на сетчатке глаза. Освещенность сетчатки на месте изображения определяет ощущение яркости, так называемую субъективную яркость. Иногда в задаче требуется сравнить яркости объекта и его мнимого изображения при наблюдении объекта глазом, вооруженным прибором. При этом подразумевают именно субъективные яркости (см., например, задачу № 4.32 из задачника [12]). В этом случае задача сводится к сравнению освещенностей сетчатки глаза невооруженного и глаза, вооруженного оптическим прибором (см. задачу № 22-14).

Решение задач

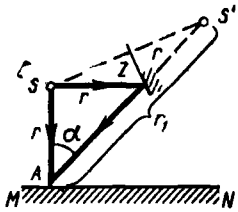

Рис 22-12

22-10. Точечный источник света S освещает горизонтальную поверхность MN (рис. 22-12). Как изменится освещенность в точке A, находящейся под источником, если сбоку S на таком же расстоянии, как и освещаемая поверхность, поместить плоское зеркало Z, отражающее свет в A?

Решение. Очевидно, вследствие отражения от зеркала светового потока освещенность поверхности в точке A увеличивается. Чтобы выполнить необходимые расчеты, учтем, что отраженные от зеркала лучи пройдут так, словно вышли из точки S', расположенной симметрично точке S относительно плоскости зеркала. Значит, можно считать, что зеркала нет, но имеется два источника света: S и S'. Так как плоское зеркало, отражая свет, не меняет угла $d\omega$, в котором распространяется световой поток $d\Phi$, то в соответствии с формулой (22.10) следует положить силу света источников S и S' одинаковой.

Используя вытекающие из построения равенства

$$AS' = r_1 = (\sqrt{2}+1)\,r, \quad \cos\alpha = 1/\sqrt{2}$$

и применив закон освещенности (22.12), найдем освещенности в точке A в отсутствие зеркала:

$$E_0 = I/r^2$$

и при наличии зеркала:

$$E = E_0 + E' = \frac{I}{r^2} + \frac{I\cos\alpha}{r_1^2} = \frac{I}{r^2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2}\right].$$

Из этих равенств получим

$$E = 1{,}12\,E_0.$$

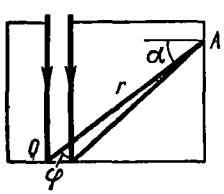

Рис 22-13

22-11. Через отверстие в крышке ящика на его дно, покрытое листом белой бумаги, падает узкий пучок света, образующий световое пятно («зайчик») площадью $S = 1{,}0$ см^2 и освещенностью $E = 1{,}0 \cdot 10^4$ лк. Считая, что бумага рассеивает свет по закону Ламберта, и приняв коэффициент рассеяния $\rho = 0{,}8$, найти освещенность стенки ящика в точке A, удаленной от «зайчика» на расстояние $r = 0{,}40$ м, если угол падения лучей $\alpha = 30°$ (рис. 22-13).

Решение. Приняв «зайчик» за точечный источник света, можно найти освещенность стенки по закону освещенности (22.12). Так как величины r, α известны, задача сводится к нахождению силы света источника. Рассеивая падающие лучи, бумага является источником света. Очевидно, сила света этого источника зависит от коэффи-

циента рассеяния ρ, который вместе с освещенностью бумаги определяет, согласно формуле (22.13), светимость «зайчика». Но, используя условие задачи, можно перейти от светимости к силе света. В самом деле, так как бумага рассеивает свет по закону Ламберта, то по светимости «зайчика» можно найти его яркость. Из формул (22.15), (22.13) получим яркость

$$B = \rho E/\pi. \qquad (1)$$

Зная яркость «зайчика» и определив его видимую из точки A площадь S_n, с помощью формулы (22.14) найдем силу света «зайчика» по направлению OA (рис. 22-13). Так как яркость «зайчика» одинакова для всех точек его поверхности, элементарные величины dI, dS_n в формуле заменим конечными I, S_n. Тогда

$$I = BS_n = BS\cos\varphi, \qquad (2)$$

где угол φ, как это видно из чертежа, связан с углом α так:

$$\varphi = \pi/2 - \alpha. \qquad (3)$$

Наконец, из закона освещенности (22.12) с учетом соотношений (1)—(3) найдем освещенность поверхности в точке A:

$$E_A = \frac{I\cos\alpha}{r^2} = \frac{\rho ES\sin\alpha\cos\alpha}{\pi r^2}.$$

Подставив числовые значения величин (предварительно выразив площадь S в м²) и выполнив вычисление, получим

$$E_A = 0{,}7 \text{ лк}.$$

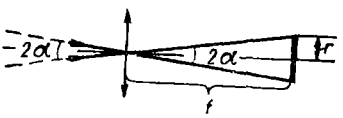

Рис. 22-14

22-12. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 15{,}0$ см и диаметром $D = 5{,}0$ см дает изображение Солнца на экране, расположенном нормально к солнечным лучам (рис. 22-14). Пренебрегая потерями света в линзе, найти среднюю освещенность изображения, если яркость Солнца $B_C = 1{,}5 \cdot 10^9$ кд/м².

Решение. Среднюю освещенность $E_{ср}$ определим из соотношения (22.11), заменив элементарные величины $d\Phi$, dS конечными величинами Φ, S:

$$E_{ср} = \Phi/S, \qquad (1)$$

где Φ — световой поток, создающий на экране изображение Солнца, S — площадь изображения. Поскольку изображение создается теми же лучами, которые сначала упали на линзу, то можно искать Φ как световой поток, падающий на поверхность линзы $S_л$. Поэтому на основании той же формулы (22.11) получим

$$\Phi = ES_л = E\pi D^2/4, \qquad (2)$$

где E — освещенность поверхности линзы солнечными лучами. Выразим ее через данную в условии яркость Солнца, воспользовавшись законом освещенности (22.12) и соотношением (22.14):

$$E = \frac{I}{R^2} = \frac{\pi r_C^2 B_C}{R}, \tag{3}$$

где r_C — радиус Солнца, πr_C^2 — площадь *видимой* его поверхности (площадь круга, а не полусферы!), R — расстояние от Земли до Солнца. Учитывая, что угловые (видимые) размеры Солнца очень малы, можно принять $r_C/R = \alpha$ (рис. 22-14). Тогда, подставив значение E, определяемое по (3), в формулу (2), получим

$$\Phi = \pi^2\alpha^2 B_C D^2/4. \tag{4}$$

Чтобы вычислить площадь S изображения Солнца, учтем, что оно будет лежать в фокальной плоскости линзы. Поэтому

$$S = \pi r^2 = \pi (f\alpha)^2. \tag{5}$$

Теперь по формуле (1) с учетом (4), (5) имеем

$$E_{ср} = \frac{\pi}{4} B_C \left(\frac{D}{f}\right)^2. \tag{6}$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ, и выполнив вычисление, найдем

$$E_{ср} = 1{,}3 \cdot 10^8 \text{ лк}.$$

З а м е ч а н и е. Так как в *фотоаппарате* изображение обычно получается вблизи фокальной плоскости объектива, то формула (6) выражает освещенность изображения на фотопленке фотоаппарата (без учета потерь света в объективе). При этом освещенность пропорциональна яркости B объекта и квадрату относительного отверстия D/f объектива.

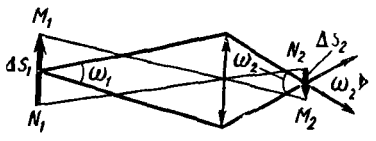

Рис. 22-15

22-13. Как зависит от диаметра D тонкой собирающей линзы яркость действительного изображения, если его рассматривать в двух случаях: 1) на белом экране, рассеивающем по закону Ламберта; 2) непосредственно?

Р е ш е н и е. 1. Яркость B поверхности, рассеивающей свет по закону Ламберта, связана с ее освещенностью E соотношением

$$B = \rho E/\pi,$$

вытекающим из формул (22.15) и (22.13), т. е. яркость изображения на экране пропорциональна его освещенности. В свою очередь освещенность изображения, полученного линзой, пропорциональна величине D^2, как это видно из формулы (6) предыдущей задачи. Следовательно, яркость изображения на экране пропорциональна квадрату диаметра линзы.

2. На рис 22-15 M_1N_1 — предмет; M_2N_2 — его действительное изображение; ω_1 — телесный угол, в котором распространяется световой поток $\Delta\Phi$, испускаемый весьма малым элементом ΔS_1 поверхности предмета и падающий на линзу; ω_2 — телесный угол, в котором распространяется этот же световой поток, падая на соответствующий элемент ΔS_2 изображения (потерями света в линзе пренебрегаем). Очевидно, под таким же углом ω_2 лучи, создав элемент изображения ΔS_2, будут расходиться. Заметим, что изображение M_2N_2 в отличие от предмета M_1N_1 видно не со всех сторон. Чтобы наблюдатель видел элемент ΔS_2 изображения, его глаз должен находиться внутри телесного угла ω_2. Следовательно, лишь в направлении одного из лучей, лежащих внутри угла ω_2, имеет смысл говорить о яркости B элемента изображения ΔS_2. В других направлениях его яркость равна нулю.

Чтобы найти величину B, учтем, что, согласно определениям яркости и силы света, яркость измеряется световым потоком, испускаемым единицей площади видимой светящейся поверхности внутри единичного телесного угла. Поэтому для яркости элемента ΔS_2 можно записать:

$$B = \Delta\Phi/\Delta S_2\omega_2. \qquad (1)$$

Так как при изменении диаметра объектива величины $\Delta\Phi$, ω_2 будут изменяться пропорционально D^2, то отношение $\Delta\Phi/\omega_2$ останется постоянным. Таким образом, яркость B изображения, рассматриваемого непосредственно, не зависит от диаметра линзы.

Замечание. Пренебрегая потерями света в линзе, можно показать, что яркость B изображения независимо от диаметра объектива равна яркости B_0 предмета, определяемой отношением

$$B_0 = \Delta\Phi/\Delta S_1\omega_1. \qquad (2)$$

Действительно, величины ΔS_1, ΔS_2, ω_1, ω_2 можно выразить через a_1, a_2 — расстояния от линзы до предмета и изображения:

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{a_1^2}{a^2}; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a_2^2}{a_1^2}.$$

Перемножив почленно эти два равенства, получим $\Delta S_2\omega_2 = \Delta S_1\omega_1$. Отсюда следует равенство яркостей: $B = B_0$.

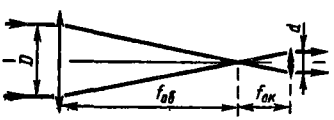

Рис. 22-16

22-14. Как изменится освещенность изображения протяженного объекта (например, планеты) на сетчатке глаза при переходе от наблюдения невооруженным глазом к наблюдению в телескоп с увеличением Г, диаметр объектива которого D. Рассмотреть два случая: 1) $\Gamma > D/d_0$ и 2) $\Gamma < D/d_0$, где d_0 — диаметр зрачка. Потерями света в телескопе пренебречь.

Решение. На рис. 22-16 показан ход лучей в телескопе, исходящих из элемента объекта, расположенного на оптической оси телескопа. На основании формул (22.7), (22.8) и чертежа выразим увеличение телескопа рядом отношений:

$$\Gamma = \frac{l}{l_0} = \frac{f_{об}}{f_{ок}} = \frac{D}{d}, \qquad (1)$$

где d — диаметр выходящего из окуляра светового пучка.

Обозначим освещенности изображений на сетчатке невооруженного глаза через E_0 и глаза, вооруженного телескопом, — через E. Для каждой из величин E_0, E, согласно определению освещенности, запишем:

$$E_0 = k\Phi_0/S_0; \quad E = k\Phi/S,$$

где Φ_0, Φ — световые потоки, входящие через зрачок в глаз, не вооруженный и вооруженный телескопом; k — коэффициент, показывающий, какая доля вошедшего в глаз светового потока достигла сетчатки; S_0, S — площади изображений на сетчатке невооруженного и вооруженного глаза. Разделим почленно эти два равенства и, основываясь на том, что площадь изображения пропорциональна квадрату его линейных размеров, получим с учетом формулы (1)

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0}\,\frac{S_0}{S} = \frac{\Phi}{\Phi_0}\,\frac{1}{\Gamma^2}. \qquad (2)$$

Таким образом, задача сводится к определению отношения Φ/Φ_0. Рассмотрим оба заданных случая.

1. $\Gamma > D/d_0$. Из равенства (1) следует, что при этом $d < d_0$. Значит, *весь* световой поток, упавший на объектив, выйдя из окуляра, попадет в глаз наблюдателя. Так как объект создает одинаковую освещенность на поверхностях объектива и невооруженного глаза, то отношение Φ/Φ_0 можно заменить отношением площадей объектива и зрачка, равным в свою очередь отношению квадратов их диаметров. Тогда из формулы (2) получим

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{D}{d_0}\right)^2 \frac{1}{\Gamma^2}.$$

Так как, по условию, $\Gamma > D/d_0$, то $E < E_0$. Значит, в этом случае освещенность E изображения на сетчатке вооруженного глаза, будучи пропорциональной квадрату диаметра объектива, остается меньше освещенности E_0 изображения на сетчатке невооруженного глаза.

2. $\Gamma < D/d_0$. Из равенства (1) следует: $d > d_0$. Значит, теперь лишь *часть* светового потока, выходящего из телескопа, попадет в глаз. Чтобы в этом случае найти отношение Φ/Φ_0, учтем, что телескоп, преобразуя падающий на объектив световой пучок, согласно формуле (1) уменьшает его диаметр в Γ раз. При этом площадь поперечного сечения пучка уменьшается в Γ^2 раз, а плотность светового потока в пучке (т. е. отношение светового потока к площади поперечного сечения пучка) увеличивается в Γ^2 раз. Поэтому при вооружении глаза

телескопом световой поток, входящий через зрачок в глаз, возрастает в Γ^2 раз. Значит, теперь по формуле (2) имеем

$$\frac{E}{E_0} = \Gamma^2 \cdot \frac{1}{\Gamma^2} = 1.$$

Отсюда следует, что при условии $\Gamma < D/d_0$ вооружение глаза телескопом не приводит к изменению освещенности изображения на сетчатке.

Замечание. Полученные в обоих случаях результаты оказываются неверными при наблюдении в телескоп звезды. Угловые размеры звезды меньше предела разрешения телескопа, определяемого явлением дифракции света (см. задачу № 24-5). Это значит, что глаз, вооруженный телескопом, по-прежнему видит звезду *светящейся точкой*. В этом случае величины S, S_0, входящие в формулу (2) и представляющие собой площади дифракционных изображений звезды, приблизительно равны друг другу, а так как $\Phi \gg \Phi_0$, то $E \gg E_0$. Таким образом, телескоп всегда значительно увеличивает освещенность изображения звезды на сетчатке глаза.

§ 23. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Основные формулы

Оптическая длина пути, проходимого световым лучом в однородной среде с показателем преломления n, равна

$$L = ns, \tag{23.1}$$

где s — геометрическая длина пути луча.

Оптическая разность хода двух световых лучей

$$\Delta = L_2 - L_1 \tag{23.2}$$

Результат интерференции света от двух когерентных источников при совпадении начальных фаз световых колебаний зависит от величины

$$\Delta = \pm m\,(\lambda_0/2) \tag{23.3}$$

где λ_0 — длина световой волны в вакууме, m — целое число. Четному m ($m = 2k$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) соответствует максимальное значение интенсивности света (интерференционный максимум), нечетному m ($m = 2k + 1$) — минимальное (интерференционный минимум).

Расстояние между интерференционными полосами на экране, полученными от двух когерентных источников света,

$$x = l\lambda/d, \tag{23.4}$$

где l — расстояние от экрана до источников, d — расстояние между источниками ($d \ll l$)

Оптическая разность хода световых лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой пластинки, по обе стороны которой находятся одинаковые среды, равна

$$\Delta = 2hn\cos r - \lambda_0/2, \tag{23.5}$$