В результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых периодов, но разных фаз возникнут эллиптические колебания, при которых конец вектора **E** описывает эллипс. В частности, при равенстве амплитуд ($\alpha = 45°$) и разности фаз $\varphi = \pi/2$ эллипс превратится в окружность. При этом свет будет поляризован по кругу.

Очевидно, к тому же результату придем, положив разность фаз равной

$$\varphi = \pi/2 + 2k\pi \quad (k = 0,1,2,3, \ldots). \tag{4}$$

Из (3), (4) найдем толщину пластинки, необходимую для получения света с круговой поляризацией:

$$l = \frac{(k + 1/4)\lambda}{n_o - n_e}. \tag{5}$$

Подставив в (5) числовые значения l, λ, n_o, n_e (l принимаем равным 0,60 мм), найдем для числа k значение 8,9. Так как k — целое число, то, округлив результат до ближайшего целого числа, возьмем $k = 9$. Теперь, подставив $k = 9$ в (5), определим точное значение толщины пластинки (ближайшее к 0,6 мм), необходимое для круговой поляризации света: $l = 0{,}605$ мм.

§ 26. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Основные формулы

Энергетическая светимость $R_э$ тела измеряется потоком излучения $\Phi_э$ (средней мощностью излучения за время, значительно большее периода световых колебаний) испускаемым единицей площади светящейся поверхности

$$R_э = \frac{\Phi_э}{S} = \frac{1}{S}\frac{dW_э}{dt}, \tag{26.1}$$

где $dW_э$ — энергия, излучаемая поверхностью S за время dt.

Спектральная плотность энергетической светимости $r_{\nu T}$, характеризующая распределение энергии в спектре излучения тела по частотам, определяется соотношениями:

$$r_{\nu T} = \frac{dR_э}{d\nu}; \quad R_э = \int_0^\infty r_{\nu T}\, d\nu. \tag{26.2}$$

Здесь $dR_э$ — энергетическая светимость, приходящаяся на интервал частот от ν до $\nu + d\nu$

Соотношение между спектральными плотностями энергетической светимости любого тела $r'_{\nu T}$ и абсолютно черного тела $r_{\nu T}$ при той же температуре (закон Кирхгофа):

$$r'_{\nu T} = a_{\nu T}\, r_{\nu T}, \tag{26.3}$$

где $a_{\nu T}$ — монохроматический коэффициент поглощения данного тела, т. е. правильная дробь, показывающая, какая часть потока излучения частоты ν, падающего на поверхность данного тела, поглощается последним.

Закон Стефана — Больцмана: энергетическая светимость абсолютного черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры, т. е.

$$R_э = \sigma T^4 \qquad (26.4)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) — постоянная Стефана — Больцмана.

Закон смещения Вина: длина волны λ_0, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости в спектре абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре, т. е

$$\lambda_0 T = b, \qquad (26.5)$$

где $b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м·К — постоянная Вина

Формула Планка для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \qquad (26.6)$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, c — скорость света в вакууме

Методические указания

1. Наряду с величиной $r_{\nu T}$, определяемой по (26.2), спектральную плотность энергетической светимости тела характеризуют также величиной $r_{\lambda T}$, показывающей распределение энергии излучения по длинам волн и выражаемой формулой

$$r_{\lambda T} = \frac{dR_э}{d\lambda}, \qquad (26.7)$$

где $dR_э$ — энергетическая светимость, приходящаяся на интервал длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$. Между величинами $r_{\nu T}$ и $r_{\lambda T}$ существует простое соотношение (см. задачу № 26-5).

2. Формулы (26.4) — (26.6) справедливы лишь для абсолютно черного тела. Для нечерных тел вместо (26.4) пишут

$$R_э = a_T R_э = a_T \sigma T^4, \qquad (26.8)$$

где a_T — *коэффициент излучения*, показывающий, какую часть составляет энергетическая светимость $R_э$ данного тела от энергетической светимости $R_э$ абсолютно черного тела, взятого при той же температуре. Он зависит от природы тела и его температуры.

Иногда в учебной литературе (см., например [2], [14], [11]), ссылаясь на закон Кирхгофа, заменяют в формуле (26.8) коэффициент излучения a_T *коэффициентом поглощения* a'_T, т. е. правильной дробью, показывающей, какая часть энергии, излученной абсолютно черным телом и падающей на поверхность данного тела, поглощается последним. При этом не указывают, о каком именно нечерном теле идет речь. Необходимо твердо помнить, что равенство коэффициентов a_T, a'_T имеет место только для так называемого серого тела, у которого монохроматический коэффициент поглощения $a_{\nu T}$ одинаков для всех частот и, следовательно, $a_{\nu T} = a'_T$ (см. задачу № 26-4).

3. В физической литературе не существует единой терминологии в отношении величин, характеризующих тепловое излучение. Так,

энергетическую светимость $R_э$ иначе называют интегральной светимостью, или интегральной излучательной способностью, или суммарной мощностью излучения. Спектральную плотность энергетической светимости часто называют испускательной способностью, а монохроматический коэффициент поглощения — поглощательной способностью. В данном руководстве употребляются термины, рекомендованные Комитетом научно-технической терминологии Академии наук СССР [16].

Решение задач

26-1. Электрическая печь потребляет мощность $P = 500$ Вт. Температура ее внутренней поверхности при открытом небольшом отверстии диаметром $d = 5{,}0$ см равна 700 °С. Какая часть потребляемой мощности рассеивается стенками?

Решение. При установившемся тепловом режиме печи вся ежесекундно потребляемая ею электрическая энергия (т. е. мощность) P излучается наружу отверстием и стенками. Следовательно,

$$P = \Phi'_э + \Phi''_э, \tag{1}$$

где $\Phi'_э$, $\Phi''_э$ — потоки излучения, испускаемые отверстием и стенками соответственно. В задаче требуется найти отношение $\alpha = \Phi''_э/P$. С учетом (1) его можно выразить так:

$$\alpha = \frac{P - \Phi'_э}{P} = 1 - \frac{\Phi'_э}{P}. \tag{2}$$

Рассматривая излучение печи через небольшое отверстие в ней как излучение абсолютно черного тела, из формулы (26.1) и закона Стефана — Больцмана (26.4) находим

$$\Phi'_э = R_э S = \sigma T^4 \pi D^2/4. \tag{3}$$

Теперь по формуле (2) с учетом (3) получим

$$\alpha = 1 - \frac{\pi D^2}{4} \frac{\sigma T^4}{P}.$$

Подставив в формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $P = 500$ Вт; $d = 0{,}050$ м; $T = 973$ К, $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4), и выполнив вычисление, найдем ответ:

$$\alpha = 0{,}8.$$

26-2. Вольфрамовая нить накаливается в вакууме током силой $I_1 = 1{,}00$ А до температуры $T_1 = 1000$ К. При какой силе тока нить накалится до температуры $T_2 = 3000$ К? Коэффициенты излучения вольфрама и его удельные сопротивления, соответствующие температурам T_1, T_2, равны: $a_{T_1} = 0{,}115$; $a_{T_2} = 0{,}334$; $\rho_1 = 25{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, $\rho_2 = 96{,}2 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Решение. Рассматривая, как и в предыдущей задаче, излучающее тело при установившейся температуре, получим

$$P = \Phi_э, \tag{1}$$

где P — мощность, потребляемая вольфрамовой нитью от источника электрической энергии, $\Phi_э$ — поток излучения, испускаемый нитью. Выразим мощность P через величины I, ρ с помощью формул (13.14), (13.4):

$$P = I^2R = I^2 \rho l/S. \tag{2}$$

Чтобы найти поток излучения $\Phi_э$, необходимо учесть, что излучение вольфрама существенно отличается от излучения абсолютно черного тела, нагретого до такой же температуры. Поэтому, используя соотношения (26.8) и (26.1), запишем

$$\Phi_э = a_T \sigma T^4 S. \tag{3}$$

Из (1) — (3) следует

$$I^2 \rho l = a_T \sigma T^4 S^2.$$

Записав это уравнение дважды для нити, нагретой до температур T_1 и T_2, получим:

$$I_1^2 \rho_1 l = a_{T_1} \sigma T_1^4 S^2,$$
$$I_2^2 \rho_2 l = a_{T_2} \sigma T_2^4 S^2.$$

Разделив почленно эти два уравнения, найдем ответ:

$$I_2 = I_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \sqrt{\frac{a_{T_2} \rho_1}{a_{T_1} \rho_2}} = 7{,}9 \text{ А}.$$

26-3. В спектре Солнца максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_0 = 0{,}47$ мкм. Приняв, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, найти интенсивность солнечной радиации (т. е. плотность потока излучения) вблизи Земли за пределами ее атмосферы.

Решение. Согласно определению плотности потока излучения I, называемой также интенсивностью излучения (радиации), можно записать [см. текст к формуле (21.13)]:

$$I = \frac{W_э}{St} = \frac{\Phi_э}{S}. \tag{1}$$

Здесь $W_э$ — энергия излучения, $\Phi_э = W_э/t$ — поток излучения сквозь поверхность S. Сравнивая (1) и (26.1), видим, что величины I, $R_э$ выражаются в одинаковых единицах.

Очевидно, интенсивность излучения I Солнца вблизи Земли пропорциональна энергетической светимости $R_э$ поверхности Солнца. Чтобы найти связь между величинами I, $R_э$, учтем, что весь поток

излучения, испускаемый поверхностью Солнца (пусть r_C — радиус Солнца), проходит сквозь поверхность сферы радиуса r, равного расстоянию от Солнца до Земли:

$$\Phi_э = R_э 4\pi r_C^2 = I 4\pi r^2.$$

Отсюда

$$I = R_э r_C^2 / r^2. \qquad (2)$$

Используя закон Стефана — Больцмана (26.4) и вычислив температуру солнечной поверхности по закону смещения Вина (26.5), находим

$$R_э = \sigma T^4 = \sigma (b/\lambda_0)^4. \qquad (3)$$

Так как величины r_C, r — табличные, то, записав в (2) вместо $R_э$ ее значение из (3), определим искомую величину:

$$I = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_0}\right)^4 \left(\frac{r_C}{r}\right)^2$$

Подставим в формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $\lambda_0 = 0{,}47 \cdot 10^{-6}$ м, $r_C = 6{,}95 \cdot 10^8$ м, $r = 1{,}50 \times \times 10^{11}$ м, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/ (м^2 · К^4), $b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м · К. Выполнив вычисление, получим

$$I = 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 = 1{,}8 \text{ кВт/м}^2.$$

З а м е ч а н и е. В действительности, ак показывает опыт, величина $I = 1{,}4$ кВт/м^2. Неточность найденного значения объясняется тем, что излучение Солнца отличается от излучения абсолютно черного тела. Поэтому формулы (26.4), (26.5) оказываются в данном случае приближенными.

26-4. Используя результат, полученный в задаче № 26-3, определить установившуюся температуру тонкой пластинки, расположенной вблизи Земли за пределами ее атмосферы перпендикулярно лучам Солнца. Считать температуру пластинки одинаковой во всех ее точках. Рассмотреть два случая, считая пластинку телом: 1) абсолютно черным; 2) серым.

Р е ш е н и е. Независимо от свойств пластинки ее температура установится тогда, когда поток излучения $\Phi_{э1}$, испускаемый нагретой пластинкой, станет равным потоку излучения $\Phi_{э2}$ Солнца, поглощаемому пластинкой, т. е.

$$\Phi_{э1} = \Phi_{э2}. \qquad (1)$$

1. Если пластинка обладает свойствами абсолютно черного тела, то она поглощает весь падающий на нее поток излучения. Поэтому на основании формулы (1) задачи № 26-3 имеем

$$\Phi_{э2} = IS, \qquad (2)$$

где S — площадь поверхности пластинки, обращенной к Солнцу.

Поток излучения $\Phi_{э1}$ пластинки найдем по закону Стефана — Больцмана, учитывая, что излучают *обе* стороны пластинки:

$$\Phi_{э1} = \sigma T^4 2S. \tag{3}$$

Из (1) — (3) находим

$$IS = \sigma T^4 2S, \tag{4}$$

откуда

$$T = \sqrt[4]{I/2\sigma} = 3{,}3 \cdot 10^2 \text{ K}.$$

2. Не являясь черным телом, пластинка будет поглощать и излучать меньше энергии, чем в первом случае. Поэтому теперь вместо (4) запишем

$$a_T' IS = a_T \sigma T^4 2S, \tag{5}$$

где a_T' — коэффициент поглощения, a_T — коэффициент излучения (см. стр. 285). Но для *серого* тела $a_T' = a_T$. Действительно, умножая обе части (26.3) на $d\nu$ и интегрируя по всем частотам, имеем

$$\int_0^\infty r_{\nu T}\, d\nu = \int_0^\infty a_{\nu T}\, r_{\nu T}\, d\nu.$$

Для серого тела

$$a_{\nu T} = a_T' = \text{const} \tag{6}$$

для всех частот. Поэтому, вынося величину $a_{\nu T} = a_T'$ за знак интеграла и учитывая (26.2), получим связь между энергетическими светимостями серого тела $R_э'$ и абсолютно черного тела $R_э$:

$$R_э' = a_T' R_э. \tag{7}$$

Сравнивая (7) и (26.8), видим, что $a_T' = a_T$. Значит, уравнение (5) приводит к прежнему ответу, т. е. температуры серой и черной пластинок одинаковы.

Замечание. Для общего случая нечерного тела, обладающего избирательным поглощением, условие (6) не выполняется. Теперь коэффициент поглощения a_T' зависит не только от свойств и температуры пластинки, но и от распределения энергии в спектре Солнца. Поэтому $a_T' \neq a_T$ и температура нечерного тела не равна температуре абсолютно черного тела. Знак неравенства зависит от того, к какой части солнечного спектра принадлежит излучение, преимущественно поглощаемое пластинкой. Наиболее высокой будет температура пластинки в том случае, если это излучение относится к интервалу частот, соответствующему наибольшему значению спектральной плотности энергетической светимости Солнца.

26-5. Исходя из определяющих формул (26.2) и (26.7), найти соотношение между величинами $r_{\nu T}$, $r_{\lambda T}$, характеризующими спектральную плотность энергетической светимости тела. Записать формулу Планка для величины $r_{\lambda T}$.

Решение. Всякий элементарный участок спектра излучения можно характеризовать как интервалом частот $d\nu$, так и интервалом длин волн $d\lambda$. Так как величины ν, λ связаны известным соотношением

$$\nu = c/\lambda, \tag{1}$$

то

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}. \tag{2}$$

Отсюда видно, что величины $d\nu$, $d\lambda$ имеют противоположные знаки.

Одному и тому же участку спектра соответствует одна и та же величина $|dR_э|$ в формулах (26 2) и (26.7). Поэтому, учитывая знаки величин $d\nu$, $d\lambda$, получим

$$r_{\nu T}\, d\nu = -r_{\lambda T}\, d\lambda. \tag{3}$$

Из (3) и (2) находим ответ на первый вопрос задачи:

$$r_{\lambda T} = -r_{\nu T}\frac{d\nu}{d\lambda} = r_{\nu T}\frac{c}{\lambda^2}. \tag{4}$$

Для того чтобы в формуле Планка (26.6) перейти к величине $r_{\lambda T}$, достаточно воспользоваться соотношениями (1) и (4):

$$r_{\lambda T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu T} = \frac{c}{\lambda^2}\cdot\frac{2\pi h\,(c/\lambda)^3}{c^2}\;\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1},$$

или

$$r_{\lambda T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}. \tag{5}$$

26-6. Определить с помощью формулы Планка энергетическую светимость $\Delta R_э$ абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 10$ Å, соответствующий максимуму спектральной плотности энергетической светимости при температуре тела $T = 3000$ К.

Решение. Из соотношения (26.7), поскольку речь идет об узком интервале длин волн, следует

$$\Delta R_э = r_{\lambda_0}\,\Delta\lambda, \tag{1}$$

где r_{λ_0} — максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре.

Чтобы определить величину r_{λ_0} по формуле Планка, надо кроме температуры T знать длину волны, соответствующую величине r_{λ_0}. Эту длину волны λ найдем по закону смещения Вина (26.5):

$$\lambda = \lambda_0 = b/T.$$

Теперь, подставив это значение λ в формулу Планка для r_λ, выведенную в задаче № 26-5, получим

$$r_{\lambda_0} = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1}. \qquad (2)$$

Из формул (1), (2) находим ответ:

$$\Delta R_э = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \frac{\Delta\lambda}{e^{hc/bk} - 1}. \qquad (3)$$

Приступая к вычислению, обратим внимание, что уравнение (2), полученное нами из формулы Планка и закона смещения Вина, выражает пропорциональную зависимость между величинами r_{λ_0} и T^5. Его иногда называют *вторым законом Вина*, записывая в виде

$$r_{\lambda_0} = b' T^5.$$

При этом значение константы

$$b' = \frac{2\pi hc^2}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1}$$

можно найти в таблицах. В таком случае расчетная формула (3) упрощается:

$$\Delta R_э = b' T^5 \Delta\lambda.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $b' = 1{,}30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3 · К^5), $T = 3000$ К, $\Delta\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ м, и выполнив вычисление, получим

$$\Delta R_э = 3{,}2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 = 3{,}2 \text{ кВт/м}^2.$$

§ 27. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

Основные формулы

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda, \qquad (27.1)$$

где ν — частота света, λ — длина световой волны, h — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме.

Масса и импульс фотона соответственно равны:

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}; \qquad (27.2)$$

$$p = mc = h/\lambda. \qquad (27.3)$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + T, \qquad (27.4)$$

где $h\nu$ — энергия поглощенного фотона, A — работа выхода электрона, T — максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона.