Теперь, подставив это значение λ в формулу Планка для r_λ, выведенную в задаче № 26-5, получим

$$r_{\lambda_0} = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1}. \qquad (2)$$

Из формул (1), (2) находим ответ:

$$\Delta R_э = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \frac{\Delta\lambda}{e^{hc/bk} - 1}. \qquad (3)$$

Приступая к вычислению, обратим внимание, что уравнение (2), полученное нами из формулы Планка и закона смещения Вина, выражает пропорциональную зависимость между величинами r_{λ_0} и T^5. Его иногда называют *вторым законом Вина*, записывая в виде

$$r_{\lambda_0} = b' T^5.$$

При этом значение константы

$$b' = \frac{2\pi hc^2}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1}$$

можно найти в таблицах. В таком случае расчетная формула (3) упрощается:

$$\Delta R_э = b' T^5 \Delta\lambda.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $b' = 1{,}30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3 · К^5), $T = 3000$ К, $\Delta\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ м, и выполнив вычисление, получим

$$\Delta R_э = 3{,}2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 = 3{,}2 \text{ кВт/м}^2.$$

§ 27. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

Основные формулы

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda, \qquad (27.1)$$

где ν — частота света, λ — длина световой волны, h — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме.

Масса и импульс фотона соответственно равны:

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}; \qquad (27.2)$$

$$p = mc = h/\lambda. \qquad (27.3)$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + T, \qquad (27.4)$$

где $h\nu$ — энергия поглощенного фотона, A — работа выхода электрона, T — максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона.

Давление света, падающего нормально на поверхность с коэффициентом отражения ρ, равно

$$P = \frac{E_э}{c}(1+\rho), \qquad (27.5)$$

где $E_э$ — энергетическая освещенность поверхности, измеряемая световой энергией, падающей на единицу поверхности за единицу времени [сравните с формулами (22.9), (22.11)].

При комптоновском рассеянии изменение длины волны рентгеновских лучей

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta), \qquad (27.6)$$

где θ — угол рассеяния, m_0 — масса покоя электрона. Величина $\lambda_c = h/m_0c$ называется *комптоновской длиной волны* частицы массой m_0. Для электрона $\lambda_c = 0{,}0242$ Å.

Методические указания

1. Здесь рассмотрены задачи на взаимодействие фотонов с веществом (давление света) или с отдельными электронами (фотоэффект, явление Комптона), которое подчиняется законам сохранения энергии и импульса. Так, закон сохранения импульса, примененный к взаимодействию фотонов с веществом, приводит к формуле (27.5) для светового давления; закон сохранения энергии, записанный для взаимодействия фотона с электроном, связанным в атоме металла, есть уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (27.4), а совместное применение этих законов для взаимодействия фотона со свободным электроном дает формулу Комптона (27.6).

2. Вычисляя скорость электрона, считаем его классической частицей, если кинетическая энергия электрона $T \ll W_0$, где $W_0 = m_0c^2 = 0{,}511$ МэВ — энергия покоя электрона (см. § 18). Так как при фотоэффекте в кинетическую энергию электрона превращается лишь часть энергии фотона $h\nu$, то неравенство $T \ll W_0$ будет заведомо выполняться при условии $h\nu \ll W_0$ или $hc/\lambda \ll W_0$. С учетом соотношения $W_0 = m_0c^2$ последнее неравенство можно записать так:

$$\lambda \gg \lambda_c, \qquad (1)$$

где λ_c — комптоновская длина волны для электрона.

Если неравенство (1) не выполняется, электрон следует считать релятивистской частицей и применять к нему соотношение (18.6).

Заметим, что значению $\lambda_c = 0{,}0242$ Å соответствует очень коротковолновое («жесткое») рентгеновское излучение, а также γ-излучение. Значит, если фотоэффект вызван излучением, относящимся к видимой части спектра, или ультрафиолетовыми лучами, то при расчете скорости фотоэлектрона его можно считать классической частицей.

3. Формула давления света (27.5) справедлива лишь для случая *нормального* падения света на поверхность. Вместо величины $E_э$ в формуле часто пишут интенсивность света I (плотность потока излуче-

ния). Действительно, как это следует из определения величин $E_э$, I [см. текст к формулам (27.5) и (21.13)], в случае нормального падения света $E_э = I$. Расчет давления света при наклонном падении лучей проведен в задаче № 27-5.

Решение задач

27-1. Определить минимальную длину волны в сплошном спектре рентгеновских лучей, если рентгеновская трубка работает под напряжением $U = 30$ кВ.

Решение. Сплошной рентгеновский спектр возникает вследствие торможения электронов, разогнанных в трубке электрическим полем, при их ударах об антикатод. Существование коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра вытекает из квантовой природы излучения. Действительно, подлетая к антикатоду, электрон обладает кинетической энергией T, равной работе, совершенной над ним силами электрического поля, т. е.

$$T = eU, \tag{1}$$

где e — заряд электрона. При ударе об антикатод энергия электрона T частично или полностью превращается в квант энергии $h\nu$. Наибольшей частоте (наименьшей длине волны) соответствует случай, когда вся энергия T превращается в квант $h\nu$. Тогда, согласно формуле (27.1),

$$T = h\nu_{макс} = hc/\lambda_{мин}. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует

$$\lambda_{мин} = hc/eU. \tag{3}$$

Подставим в (3) числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $U = 3{,}0 \cdot 10^{4}$ В. Выполнив вычисление, получим

$$\lambda_{мин} = 0{,}41 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0{,}41 \text{ Å}.$$

27-2. На металлическую пластину падает монохроматический свет ($\lambda = 0{,}413$ мкм). Поток фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, полностью задерживается, когда разность потенциалов тормозящего электрического поля достигает $U = 1{,}00$ В. Определить работу выхода в электронвольтах и красную границу фотоэффекта.

Решение Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (27.4), учитывая данные условия, в виде

$$hc/\lambda = A + T.$$

Так как даже самые быстрые электроны задерживаются электрическим полем, пролетев в нем расстояние, соответствующее разности потенциалов U, то их начальная кинетическая энергия T связана с величиной U соотношением (1) предыдущей задачи. Следовательно,

$$hc/\lambda = A + eU.$$

Отсюда найдем работу выхода:

$$A = hc/\lambda - eU = 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2{,}0 \text{ эВ}.$$

Красной (длинноволновой) границе фотоэффекта $\lambda_{кр}$ в уравнении Эйнштейна соответствует $T = 0$. Поэтому, полагая $\lambda = \lambda_{кр}$, получим

$$\lambda_{кр} = hc/A = 0{,}62 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0{,}62 \text{ мкм}.$$

27-3. Определить максимальную скорость электронов, вылетающих из металла под действием γ-излучения длиной волны $\lambda = 0{,}030$ Å.

Решение. Снова применим уравнение Эйнштейна (27.4). Обратим внимание на то, что длина волны γ-излучения близка к комптоновской длине волны λ_c для электрона и, следовательно, энергия γ-фотона $h\nu$ есть величина одного порядка с энергией покоя электрона $W_0 = 0{,}511$ МэВ (см. методические указания, п. 2). Так как при этом работа выхода A электрона из металла (любого) измеряется всего лишь несколькими электронвольтами, то величиной A в (27.4) можно пренебречь, а электрон следует рассматривать как релятивистскую частицу, кинетическая энергия которой выражается формулой (18.6). Таким образом, имеем

$$\frac{hc}{\lambda} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

или, введя комптоновскую длину волны для электрона,

$$\frac{\lambda_c}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1. \qquad (1)$$

Из (1) найдем относительную скорость электрона $\beta = v/c$, учитывая, что $\lambda_c = 0{,}0242$ Å:

$$\beta = \frac{\sqrt{\lambda_c(\lambda_c + 2\lambda)}}{\lambda_c + \lambda} = 0{,}86.$$

Отсюда для скорости v получим

$$v = \beta c = 0{,}86 \cdot 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 2{,}5 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

27-4. Монохроматический ($\lambda = 0{,}662$ мкм) пучок света падает нормально на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}80$. Определить количество фотонов, ежесекундно поглощаемых 1 см^2 поверхности, если давление света на поверхность $P = 1{,}00$ мкПа.

Решение. Так как условие задачи позволяет найти энергию фотона $h\nu$, то выразим искомое число N поглощенных фотонов как отношение энергии света W, *поглощенного* 1 см^2 поверхности за 1 с, к энергии $h\nu$ одного фотона, т. е.

$$N = \frac{W}{h\nu} = \frac{W\lambda}{c}. \qquad (1)$$

Чтобы связать величину W с данным давлением P света, воспользуемся формулой (27.5). Входящую в нее энергетическую освещенность $E_э$, согласно определению, выразим так:

$$E_э = W_0/St, \qquad (2)$$

где W_0 — энергия света, *падающего* на площадку S за время t.

Из определения коэффициента отражения ρ следует, что между величинами W, W_0 имеется соотношение

$$W = W_0(1 - \rho). \qquad (3)$$

Таким образом, с учетом (2), (3) формула (27.5) примет вид

$$P = \frac{W}{cSt}\,\frac{1+\rho}{1-\rho}. \qquad (4)$$

Исключив величину W из уравнений (1) и (4), получим ответ:

$$N = \frac{P\lambda St}{h}\,\frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $P = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ Па, $\lambda = 0{,}662 \cdot 10^{-6}$ м, $S = 10^{-4}$ м^2, $t = 1{,}00$ с, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $\rho = 0{,}80$ Выполнив вычисление, найдем

$$N = 1{,}0 \cdot 10^{21}.$$

27-5. Параллельный пучок света с интенсивностью $I = 0{,}20$ Вт/см^2 падает под углом $\varphi = 60°$ на плоское зеркало с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}90$. Определить давление света на зеркало.

Решение. Если бы свет падал на зеркало нормально ($\varphi = 0$), световое давление P_0 выражалось бы формулой (27.5). Так как при этом $E_э = I$ (см. методические указания, п. 3), то можем записать

$$P_0 = I(1 + \rho)/c. \qquad (1)$$

Используя квантовые представления о свете, выясним зависимость светового давления P от угла падения φ. Исходя из определения давления и применив к зеркалу второй закон Ньютона, запишем

$$P = \frac{F_n}{S} = \frac{F_n\,\Delta t}{S\Delta t} = \frac{(\Delta mv)_n}{S\Delta t},$$

где $(\Delta mv)_n$ — проекция импульса Δmv, сообщенного фотонами за время Δt зеркалу, на направление нормали к нему; S — площадь освещенной поверхности. По закону сохранения импульса величина, Δmv численно равна суммарному изменению импульса Δp всех фотонов при их взаимодействии с зеркалом за время Δt. Следовательно,

$$P = \frac{(\Delta p)_n}{S\Delta t}. \qquad (2)$$

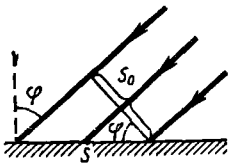

Рис 27 1

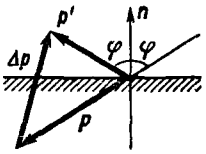

Рис 27-2

Величины S, $(\Delta p)_n$ зависят от угла падения φ. Действительно, как это видно из рис. 27-1,

$$S = S_0/\cos\varphi, \qquad (3)$$

где S_0 — площадь поперечного сечения светового пучка На рис. 27-2 изображены суммарные импульсы фотонов, падающих на зеркало и отраженных от него (за время Δt): $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, так что

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}.$$

Отсюда, переходя к проекциям на направление нормали $\mathbf{n}$ к зеркалу и учитывая противоположные направления проекций p_n, p_n, запишем

$$(\Delta p)_n = p_n - p_n = p' \cos\varphi + p\cos\varphi = (p' + p)\cos\varphi. \qquad (4)$$

Из (2) — (4) найдем

$$P = \frac{(p' + p)}{S_0\,\Delta t}\cos^2\varphi.$$

Так как $P = P_0$ при $\varphi = 0$, где давление P_0 определяется формулой (1), то окончательно имеем

$$P = \frac{I}{c}(1 + \rho)\cos^2\varphi.$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $I = 2{,}0 \cdot 10^3$ Вт/м², $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с, $\rho = 0{,}90$, $\cos\varphi = 0{,}50$. Выполнив вычисление, получим

$$P = 3{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{Па}.$$

27-6. Фотон с частотой ν_0 испущен с поверхности звезды, масса которой M и радиус r_0. Найти величину гравитационного смещения частоты фотона $\Delta\nu/\nu_0$ на очень большом расстоянии от звезды.

Решение. Выясним причину изменения частоты фотона при его удалении от звезды. Обладая электромагнитной энергией $h\nu$, фотон имеет связанную с ней массу m, определяемую формулой (27.2):

$$m = h\nu/c^2. \tag{1}$$

Поэтому в гравитационном поле звезды на него действует сила тяготения

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} = \gamma \frac{Mh\nu}{c^2 r^2}, \tag{2}$$

где r — расстояние от центра звезды до фотона. Так как эта сила направлена противоположно перемещению фотона, то она совершает отрицательную работу, вследствие чего уменьшается его электромагнитная энергия (подобно тому, как из-за действия силы тяжести уменьшается кинетическая энергия брошенного вверх камня). Поскольку электромагнитная энергия фотона пропорциональна его частоте, то при удалении фотона от звезды его частота уменьшается.

По закону сохранения энергии, полная энергия фотона, равная сумме его электромагнитной энергии $h\nu$ и потенциальной энергии тяготения, есть величина постоянная. Однако для решения задачи нельзя воспользоваться формулой (5.4) потенциальной энергии тяготения, так как она выведена для постоянных величин m_1 и m_2. Масса же фотона, как это видно из (1), уменьшается вместе с частотой при удалении от звезды. Поэтому, учитывая соотношение (2), вычислим работу силы тяготения $\mathbf{F}$, совершенную при элементарном перемещении $d\mathbf{r}$ фотона:

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = F dr \cos\pi = -\gamma \frac{Mh\nu}{c^2 r^2} dr$$

и приравняем ее, согласно закону сохранения, изменению электромагнитной энергии фотона: $d(h\nu) = dA$, т. е.

$$h d\nu = -\gamma \frac{Mh\nu}{c^2} \frac{dr}{r^2}.$$

Отсюда, разделив переменные, получим

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\gamma \frac{M}{c^2} \frac{dr}{r^2}.$$

Так как при изменении расстояния r в заданных условием пределах от значения r_0 до ∞ частота изменяется от ν_0 до ν, то

$$\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\nu} = -\gamma \frac{M}{c^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2}.$$

Интегрирование дает

$$\ln\frac{\nu}{\nu_0}=-\gamma\frac{M}{c^2}\frac{1}{r_0},\quad \frac{\nu}{\nu_0}=e^{-\gamma M/c^2 r_0}.$$

Отсюда найдем ответ:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0}=\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\frac{\nu}{\nu_0}-1=e^{-\gamma M/c^2 r_0}-1.$$

Полученный результат — величина отрицательная при любых значениях M, r_0, что означает уменьшение частоты фотона ($\nu<\nu_0$).

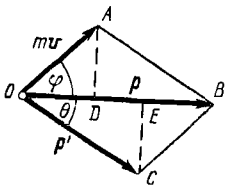

Рис. 27-3

27-7. Фотон рентгеновского излучения с энергией $\varepsilon = 0{,}15$ МэВ испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны увеличилась на $\Delta\lambda = 0{,}015$ Å. Найти угол φ, под которым вылетел комптоновский электрон отдачи.

Решение. Увеличение длины волны рентгеновских лучей при их рассеянии веществом (*явление Комптона*) объясняется упругим столкновением фотонов с электронами. При упругом ударе фотон в соответствии с законами сохранения передает свободному электрону часть импульса и энергии. Уменьшение энергии фотона означает согласно формулам (27.1) уменьшение частоты рентгеновского излучения и увеличение его длины волны.

По закону сохранения импульса импульс $\mathbf{p}$ падающего фотона равен векторной сумме импульса $\mathbf{p}'$ рассеянного фотона и импульса $m\mathbf{v}$ свободного электрона, который он приобрел в результате соударения с фотоном (рис. 27-3). Заметим, что угол рассеяния θ на рис. 27-3 можно определить из формулы Комптона (27.6). Следовательно, чтобы найти угол φ, необходимо знать еще два линейных элемента параллелограмма $OABC$, например p и p'. Проведя $AD\perp OB$, имеем

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{AD}{OD}=\frac{CE}{BE}=\frac{p'\sin\theta}{p-p'\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{p/p'-\cos\theta}, \tag{1}$$

где, согласно (27.6),

$$\cos\theta=1-\Delta\lambda/\lambda_c, \tag{2}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\Delta\lambda(2\lambda_c-\Delta\lambda)}/\lambda_c. \tag{3}$$

Импульсы p, p' падающего и рассеянного фотонов связаны с их энергиями ε, ε' соотношениями (27.1), (27.3):

$$p=\varepsilon/c,\quad p'=\varepsilon'/c. \tag{4}$$

Предварительно найдем энергию рассеянного фотона:

$$\varepsilon' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc}{hc/\varepsilon + \Delta\lambda} = \frac{\varepsilon hc}{hc + \varepsilon\Delta\lambda}.$$

Следовательно, вместо второго равенства (4) имеем

$$p' = \varepsilon h/(hc + \varepsilon\Delta\lambda). \qquad (5)$$

Подставив в (1) вместо величин $\cos\theta$, $\sin\theta$, p, p' их значения по формулам (2) — (5), после преобразований получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2\lambda_c/\Delta\lambda - 1}}{1 + \varepsilon\lambda_c/ch} = \frac{\sqrt{2\lambda_c/\Delta\lambda - 1}}{1 + \varepsilon/m_0 c^2}.$$

После подстановки числовых значений величин: $\lambda_c = 0{,}0242$ Å, $\Delta\lambda = 0{,}015$ Å, $\varepsilon = 0{,}15$ МэВ, $m_0c^2 = 0{,}511$ МэВ — найдем:

$$\operatorname{tg}\varphi = 1{,}15; \quad \varphi = 49^\circ.$$