Глава 8

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 28. АТОМ БОРА

Основные формулы

Первый постулат Бора: электроны могут двигаться в атоме только по определенным орбитам, находясь на которых они не излучают энергии. Эти орбиты определяются условием

$$mv_n r_n = nh/2\pi, \tag{28.1}$$

где r_n — радиус n-й орбиты, $mv_n r_n$ — момент импульса электрона на этой орбите, n — главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Второй постулат Бора: при переходе электрона с одной орбиты на другую атом излучает или поглощает квант энергии, равный

$$h\nu_{lk} = W_k - W_l, \tag{28.2}$$

где W_l, W_k — энергии электрона на соответствующих орбитах.

Формула Бальмера — Ритца для длин волн линий спектра водорода

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2}\right). \tag{28.3}$$

Здесь n_l, n_k — целые числа ($n_k > n_l$). Число n_l определяет серию, n_k — отдельную линию этой серии. Величина

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \tag{28.4}$$

называется постоянной Ридберга.

Сериальная формула для длин волн линий спектра водородоподобных ионов

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2}\right), \tag{28.5}$$

где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Частоты характеристического рентгеновского излучения определяются законом Мозли:

$$\sqrt{\nu} = a(Z - b), \tag{28.6}$$

где

$$a = \sqrt{Rc(1/n_l^2 - 1/n_k^2)}, \tag{28.7}$$

b — постоянная экранирования, зависящая сильно от серии (числа n_l) и слабо — от линии данной серии (числа n_k).

Методические указания

1. Имеется много задач, в которых рассматриваются спектры водорода и водородоподобных ионов (т. е. ионов, имеющих по одному электрону: He^+, Li^{++} и т. д.).

Чтобы с помощью формул (28.3), (28.5) находить длину волны λ (или частоту $\nu = c/\lambda$, или квант энергии $h\nu$), надо прежде всего, исходя из условия задачи, определить числа n_i и n_k, входящие в эти формулы. Так, для водорода числу $n_i = 1$ соответствует ультрафиолетовая серия (серия Лаймана); $n_i = 2$ — видимая серия (серия Вальмера), $n_i = 3$ — первая инфракрасная серия (серия Пашена), $n_i = 4$ — вторая инфракрасная серия (серия Брэкета), $n_i = 5$ — третья инфракрасная серия (серия Пфунда). Число n_k выражается формулой $n_k = n_i + N$, где N — номер спектральной линии в данной серии, взятый в порядке убывания длины волны. Например, для второй линии серии Пашена $n_i = 3$, $n_k = 3 + 2 = 5$.

2. Постоянная Ридберга [см (28.4)] вычислена в предположении, что в атоме водорода (или водородоподобного иона) электрон вращается вокруг *неподвижного* ядра. Это возможно лишь при условии, когда масса ядра бесконечно велика по сравнению с массой электрона. Поэтому постоянную Ридберга, определяемую по (28.4), часто обозначают через R_∞.

В действительности электрон и ядро вращаются вокруг их общего центра масс, что приводит к несколько иному значению для постоянной Ридберга. В самом деле, если умножить обе части формулы (28.5) на hc и сравнить ее с формулой (28.2), то получим

$$W_i = -\frac{RhcZ^2}{n_i^2},$$

т. е. при фиксированном числе n_i постоянная Ридберга оказывается пропорциональной полной энергии W_i атома. Но из законов механики следует, что между *действительной* полной энергией W атома и его полной энергией W_∞, вычисленной в предположении, что ядро неподвижно, существует связь

$$W = \frac{W_\infty}{1 + m/M},$$

где M — масса ядра, m — масса электрона. А так как величина R пропорциональна полной энергии атома, можно на основании этой формулы записать для точного значения постоянной Ридберга:

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m/M}, \qquad (28.8)$$

где $R_\infty = 1{,}097 \cdot 10^{-7}$ м$^{-1}$. Таким образом, величина R несколько различна для разных атомов. Это обстоятельство надо учитывать в задачах на сравнение спектров различных атомов (см. задачи № 28-3, 28-4).

3. При вычислении частоты характеристических рентгеновских лучей по закону Мозли следует иметь в виду, что спектральные серии обозначаются теми же буквами, что и электронные слои, переход электронов на каждый из которых вызывает данное излучение. Например, K-серия обусловлена переходом электронов на K-слой. При этом се-

риям (электронным слоям) K, L, M, N соответствуют квантовые числа n_i в формуле (28.7), равные 1, 2, 3, 4. Число n_k по-прежнему определяется формулой $n_k = n_i + N$, где N — номер линии в данной серии. Линии серии записываются в порядке уменьшения длины волны индексами α, β, γ, ... Например, вторая линия K-серии обозначается K_β; в этом случае $n_i = 1$, $n_k = 1 + 2 = 3$.

Если для решения задачи надо знать величину постоянной экранирования b, то руководствуются следующим: $b = 1$ для линии K_α и $b > 1$ для остальных линий K-серии (см. замечание к задаче № 28-5). Однако при приближенных расчетах считают величину b одинаковой для всех линий одной и той же серии. Тогда $b \approx 1$ для серии K и $b \approx 7{,}5$ для серии L.

Решение задач

28-1. Вычислить для атома водорода радиус первой боровской орбиты и скорость электрона на ней.

Решение. Радиус n-й боровской орбиты r_n и скорость v_n электрона на ней связаны между собой уравнением (28.1) первого постулата Бора. Чтобы иметь еще одно уравнение, связывающее величины r_n, v_n, запишем второй закон Ньютона для электрона, движущегося под действием кулоновской силы притяжения ядра* по круговой орбите. Учитывая, что ядром атома водорода является протон, заряд которого равен по модулю заряду электрона e, запишем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} = m\frac{v_n^2}{r_n}, \qquad (1)$$

где m — масса электрона, v_n^2/r_n — центростремительное ускорение. Решив совместно (1) и (28.1), получим

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2}, \qquad v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h n}.$$

Положив здесь $n = 1$ и произведя вычисление, найдем:

$$r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ \text{м}; \quad v = 2{,}2 \cdot 10^6\ \text{м/с}.$$

28-2. Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома водорода.

Решение. *Потенциалом ионизации* U_i называют ту наименьшую разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с данным невозбужденным атомом ионизировать его. Работа по удалению электрона из атома A_i равна работе сил электрического поля, ускоряющего электрон, $A' = eU_i$, поэтому

$$A_i = eU_i. \qquad (1)$$

* Между электроном и ядром действует также гравитационная сила. Однако, как показывает расчет, эта сила пренебрежимо мала по сравнению с кулоновской силой.

Учитывая квантовый характер поглощения энергии атомом, можно сказать, что работа ионизации A_i равна кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом водорода при переходе электрона с первой боровской орбиты на бесконечно удаленную орбиту. Тогда, применив формулу Бальмера — Ритца (28.3) и положив в ней $n_i = 1$, $n_k = \infty$, получим

$$A_i = h\nu = hc\frac{1}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right) = hcR. \qquad (2)$$

Теперь из (1), (2) найдем

$$U_i = hcR/e = 13{,}6 \text{ В}. \qquad (3)$$

Первый потенциал возбуждения U_1 есть та наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода это соответствует переходу электрона с первой боровской орбиты на вторую. Снова приравняв работу сил ускоряющего электрического поля eU_1 кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом при его переходе в первое возбужденное состояние, и положив в (28.3) $n_i = 1$, $n_k = 2$, получим

$$eU_1 = h\nu = hcR\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right) = \frac{3}{4}hcR,$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{3}{4}\frac{hcR}{} = \frac{3}{4}\cdot 13{,}6 \text{ В} = 10{,}2 \text{ В}.$$

28-3. Найти разность ионизационных потенциалов водорода (H) и дейтерия (D).

Решение. Прежде всего выясним, в чем причина различия ионизационных потенциалов водорода и дейтерия. Дейтерий является одним из изотопов водорода, отличаясь от обычного водорода лишь массой ядра: $M_D \approx 2M_H$. Масса ядра определяет его гравитационное поле. Однако последнее не играет в атоме практически никакой роли (см. сноску к задаче № 28-1). Поэтому ионизационные потенциалы атомов H и D должны были бы совпадать.

Действительно, если рассуждения предыдущей задачи, приведенные для атома водорода, повторить теперь для атома дейтерия, то снова придем к формуле

$$U = hcR/e.$$

Однако, строго говоря, необходимо учесть, что постоянная Ридберга R различна для атомов H и D: точное ее значение, вычисленное с учетом движения электрона и ядра вокруг их общего центра масс, дается формулой (28.8). Тогда для ионизационных потенциалов водорода U_H и дейтерия U_D получим:

$$U_H = \frac{hcR_\infty}{1 + m/M_H}, \quad U_D = \frac{hcR_\infty}{1 + m/M_D},$$

где m — масса электрона, M_H, M_D — массы ядер водорода и дейтерия.

Учитывая, что $m \ll M_H < M_D$, найдем по формулам приближенного вычисления:

$$U_D - U_H = hcR_\infty\left(1-\frac{m}{M_D}\right) - hcR_\infty\left(1-\frac{m}{M_H}\right) = hcR_\infty\left(\frac{m}{M_H}-\frac{m}{M_D}\right).$$

Взяв из таблиц значения: $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, $M_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, $M_D = 3{,}35 \cdot 10^{-27}$ кг — и произведя вычисление, получим

$$U_D - U_H = 13{,}6 \cdot 0{,}000273 \text{ В} = 0{,}0037 \text{ В} = 3{,}7 \text{ мВ}.$$

28-4. Вычислить необходимую минимальную разрешающую силу спектрального прибора в двух случаях 1) чтобы разрешить первые 20 линий серий Бальмера; 2) чтобы при наблюдении спектра смеси водорода и ионизированного гелия разрешить первую линию серии Бальмера и вторую линию серии Пиккеринга.

Решение Серией Пиккеринга называют спектральную серию ионизированного гелия, соответствующую значениям квантовых чисел в (28.5) : $n_i = 4$, $n_k = 5, 6, 7, \ldots$ Разрешающая сила спектрального прибора определяется соотношением (24.4). Так как с увеличением номера спектральной линии одной и той же серии разность длин волн $\delta\lambda$ соседних линий уменьшается (линии располагаются все теснее), то, очевидно, все первые 20 линий серии Бальмера будут разрешены, если будут разрешены двадцатая (λ_{20}) и двадцать первая (λ_{21}) линии этой серии. Поэтому согласно (24.4) для минимальной разрешающей силы спектрального прибора получим

$$r = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{20}-\lambda_{21}}.$$

Длины волн λ_{20}, λ_{21} найдем по формуле Бальмера — Ритца (28.3), положив $n_i = 2$, $n_k = 22$ (для λ_{20}) и $n_k = 23$ (для λ_{21}):

$$\frac{1}{\lambda_{20}} = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{22^2}\right) = \frac{R}{4{,}0333}; \quad \frac{1}{\lambda_{21}} = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{23^2}\right) = \frac{R}{4{,}0305}.$$

Отсюда

$$r = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{20}-\lambda_{21}} = \frac{4{,}0333}{4{,}0333 - 4{,}0305} = 1{,}41 \cdot 10^3.$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, выразим длину волны λ_H первой линии серии Бальмера по формуле (28.3), а длину волны λ_{He} второй линии серии Пиккеринга — по сериальной формуле (28.5), положив для гелия $Z = 2$. Тогда получим:

$$\frac{1}{\lambda_H} = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) = 7{,}2\,R; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\lambda_{He}} = 4R\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{6^2}\right) = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) = 1{,}2R. \qquad (2)$$

Из формул (1), (2) следует, что длины волны λ_H, λ_{He} совпадают. Поэтому, казалось бы, разрешить соответствующие линии двух спектров нельзя. Однако в действительности величины λ_H, λ_{He} несколько отличаются друг от друга, так как постоянная Ридберга R различна для атомов водорода и гелия вследствие различия их масс, как это следует из (28.8). Поэтому более точно формулы (1), (2) надо записать так:

$$\frac{1}{\lambda_H}=7{,}2\,R_H=\frac{7{,}2\,R_\infty}{1+m/M_H};\quad \frac{1}{\lambda_{He}}=7{,}2\,R_{He}=\frac{7{,}2\,R_\infty}{1+m/M_{He}}.$$

Отсюда

$$r=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=\frac{\lambda_H}{\lambda_H-\lambda_{He}}=\frac{1+m/M_H}{(1+m/M_H)-(1+m/M_{He})}=\frac{M_H+m}{M_{He}-M_H}\,\frac{M_{He}}{m}.$$

Взяв из таблиц значения величин $M_H = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, $M_{He} = 3{,}35\cdot10^{-27}$ кг, $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг — и выполнив вычисление, найдем

$$r = 7{,}3\cdot10^3.$$

28-5. Антикатод рентгеновской трубки покрыт молибденом ($Z = 42$). Найти приближенно минимальную разность потенциалов, которую надо приложить к трубке, чтобы в спектре рентгеновского излучения появились линии K-серии молибдена.

Решение. В отличие от задачи № 27-1, где рассматривалось тормозное рентгеновское излучение со сплошным спектром, здесь речь идет о *характеристических* рентгеновских лучах, дающих линейчатый спектр. Как известно, характеристическое рентгеновское излучение обусловлено электронными переходами в глубокие электронные слои атома. Серия K возникает при переходах электронов на самый глубокий слой K ($n = 1$) из менее глубоких электронных слоев L ($n = 2$), M ($n = 3$) и т. д. Но чтобы любой из этих переходов стал возможным, необходимо появление вакантного места в K-слое. Для этого один из двух электронов K-слоя должен быть вырван из атома (или переведен на внешний, не заполненный электронами слой), так как внутренние слои L, M и т. д. целиком заполнены электронами.

Минимальную энергию, необходимую для удаления электрона K-слоя из атома, можно приближенно вычислить по закону Мозли. Действительно, из (28.6) и (28.7) следует, что квант энергии характеристических рентгеновских лучей равен

$$\varepsilon=h\nu=ha^2(Z-b)^2=hc\,R\,(Z-b)^2\left(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_k^2}\right). \qquad (1)$$

Положив в (1) $n_l = 1$, $n_k = \infty$ и приняв приближенно, что постоянная экранирования $b = 1$ для всех линий K-серии, найдем энергию ε' излучения атома, соответствующую переходу внешнего электрона на K-слой:

$$\varepsilon' = hcR\,(Z-1)^2. \qquad (2)$$

Очевидно, такую же энергию должен поглотить атом при обратном процессе — вырывании электрона из K-слоя, что необходимо для появления линий K-серии.

Эту энергию ε' атом молибдена получает в результате удара об антикатод электрона, обладающего кинетической энергией eU [см. формулу (1) задачи № 27-1]. Разность потенциалов U будет минимальной, когда *вся* энергия электрона $eU_{мин}$ поглощается атомом, т. е.

$$eU_{мин} = \varepsilon'. \tag{3}$$

Из (3) и (2) получим

$$U_{мин} = \frac{hcR}{e}(Z-1)^2. \tag{4}$$

Используя результат (3) задачи № 28-2, найдем

$$U_{мин} = 13{,}6 \cdot (42-1)^2 \text{ В} = 23 \cdot 10^3 \text{ В} = 23 \text{ кВ}.$$

Замечание. Вычисленный результат для $U_{мин}$ оказался завышенным по сравнению с его истинным значением (20 кВ), так как, приняв в формуле (1) постоянную экранирования $b = 1$, мы учли лишь экранирующее действие одного электрона K-слоя. Это верно при электронном переходе $L \to K$, что соответствует K_α-линии и числу $n_k = 2$ в формуле (1). В данном же случае ($n_k = \infty$) оказывают слабое экранирующее действие и все остальные электроны атома. Поэтому $b > 1$.

§ 29. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Основные формулы

Формула де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}, \tag{29.1}$$

где λ — длина волны, соответствующая частице с импульсом p; $\hbar = h/2\pi = 1{,}06 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant 2\pi\hbar, \tag{29.2}$$

где Δx — неопределенность координаты частицы, Δp_x — неопределенность проекции импульса частицы на ось x.

Вероятность пребывания частицы в объеме dV

$$dP = |\psi|^2\, dV, \tag{29.3}$$

где ψ — волновая функция, $|\psi|^2$ — плотность вероятности.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W-U)\psi = 0. \tag{29.4}$$

Здесь ψ — волновая функция, описывающая состояние частицы Δ — оператор Лапласа $\left(\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$, W — полная энергия частицы, U — ее потенциальная энергия.