Из формулы (29.16) видно, что величина M_J будет наибольшей при наибольшем значении квантового числа J. Последнее равно сумме наибольших значений квантовых чисел L и S:

$$J_{\text{макс}} = L_{\text{макс}} + S_{\text{макс}}. \qquad (2)$$

Так как полный момент импульса заполненной электронной оболочки равен нулю, то будем рассматривать только три данных электрона. Соответствующие им квантовые числа l равны: $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, $l_3 = 2$. Следовательно, $L_{\text{макс}} = l_1 + l_2 + l_3 = 3$.

Чтобы найти максимальное значение S, сложим спиновые квантовые числа трех электронов: $S_{\text{макс}} = {}^1/_2 + {}^1/_2 + {}^1/_2 = {}^3/_2$. Подставив в (2) значения $L_{\text{макс}}$ и $S_{\text{макс}}$, получим $J_{\text{макс}} = 9/2$.

Теперь по формулам (29.13), (29.14), (29.16) вычислим:

$$M_L = \sqrt{48}\,\hbar/2;\ M_S = \sqrt{15}\,\hbar/2;\ M_J = \sqrt{99}\,\hbar/2.$$

Подставив эти значения M_L, M_S, M в (1) и произведя вычисление, найдем:

$$\cos\alpha = 0{,}857;\ \alpha = 31^\circ.$$

§ 30. РАДИОАКТИВНОСТЬ. ПОГЛОЩЕНИЕ γ-ЛУЧЕЙ

Основные формулы

Закон радиоактивного распада: число радиоактивных ядер — dN, распадающихся за промежуток времени между t и $t + dt$, пропорционально этому промежутку dt и числу ядер N, еще не распавшихся к моменту t, т. е.

$$-dN = \lambda N dt, \qquad (30.1)$$

где λ — постоянная радиоактивного распада. Интегрируя (30.1), получим

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (30.2)$$

где N_0 — число радиоактивных ядер в момент $t = 0$.

Период полураспада T, т. е. промежуток времени, за который распадается половина начального числа ядер, и постоянная распада λ связаны соотношением

$$T\lambda = \ln 2. \qquad (30.3)$$

Активность препарата измеряется числом ядер, распадающихся в единицу времени:

$$a = -\frac{dN}{dt} = \lambda N. \qquad (30.4)$$

Если радиоизотоп A_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп A_2 с постоянной распада λ_2, то число ядер радиоизотопа A_2 изменяется со временем по закону

$$N_2(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right), \qquad (30.5)$$

где $N_1(0)$ — число ядер радиоизотопа A_1 в момент $t = 0$.

Интенсивность узкого пучка монохроматических γ-лучей, прошедших сквозь слой вещества толщиной x, уменьшается по закону

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \qquad (30.6)$$

где I_0 — интенсивность излучения, падающего на слой, μ — линейный коэффициент ослабления.

Методические указания

1. При решении задач на явление радиоактивности надо различать два случая:

а) имеет место радиоактивный распад *изолированного* вещества. Тогда пользуются законом радиоактивного распада в форме (30.2). Если из условия задачи следует, что время распада Δt пренебрежимо мало по сравнению с периодом полураспада T данного радиоизотопа ($\Delta t \ll T$), то число нераспавшихся ядер N можно считать практически постоянным в течение всего времени Δt и равным их начальному числу N_0. Тогда число распавшихся ядер ΔN можно находить по формуле (30.1), записав ее в виде

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t$$

(знак «—» опущен, так как здесь под ΔN подразумевается положительная величина $N_0 - N$);

б) происходит распад одного радиоактивного вещества (дочернего), взятого в смеси с другим радиоактивным веществом (материнским), из которого оно возникает. В этом случае пользуются соотношением (30.5), выражающим закон изменения со временем числа ядер дочернего вещества.

Обратим внимание на особый случай: если период полураспада T_1 материнского вещества существенно превышает период полураспада T_2 дочернего вещества, т. е. $T_1 \gg T_2$, то по истечении некоторого промежутка времени устанавливается радиоактивное равновесие между этими веществами. При этом число ежесекундно распадающихся ядер дочернего вещества равно числу вновь образующихся ядер этого же вещества в результате распада ядер материнского вещества. Так как активности обоих веществ становятся одинаковыми, то из (30.4) и (30.3) получаем

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2}.$$

2. В некоторых задачах требуется найти число атомов N, содержащихся в данной массе m некоторого радиоизотопа ${}^{A}_{Z}X$ (здесь под X подразумевается химический символ данного элемента, Z — атомный номер, равный числу протонов в ядре, A — массовое число, равное суммарному числу протонов и нейтронов, т. е. числу нуклонов в ядре). Для этого пользуются соотношением

$$N = N_A \nu = N_A (m/\mu), \qquad (1)$$

где N_A — постоянная Авогадро, ν — число молей, содержащихся в данном препарате, μ — молярная масса изотопа.

Напомним, что между молярной массой μ изотопа и его относительной атомной массой M_r существует соотношение

$$\mu = 10^{-3} M_r \text{ кг/моль}.$$

Вычисляя по (1), следует иметь в виду, что для всякого изотопа величина M_r выражается числом, весьма близким к его массовому числу A, т. е. $\mu \approx 10^{-3} A$ кг/моль.

Решение задач

30-1. Зная постоянную распада λ ядра, определить вероятность P того, что ядро распадется за промежуток времени от 0 до t.

Решение. Выясним, что́ следует понимать под искомой вероятностью P. Процесс радиоактивного распада носит статистический характер. Это значит: если многократно повторять опыты с радиоактивным препаратом, содержащим достаточно большое начальное число ядер N_0, то за промежуток времени от 0 до t распадется каждый раз одна и та же доля ядер $\Delta N/N_0$. Эта величина, характеризующая относительную частоту события — распада ядра, и принимается за вероятность P распада ядра в течение данного промежутка времени. Таким образом,

$$P = \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0},$$

где N — число нераспавшихся ядер к моменту t. Подставив в это равенство вместо N его значение по закону радиоактивного распада (30.2) и произведя сокращение, получим ответ:

$$P = 1 - e^{-\lambda t}.$$

30-2. Определить, сколько ядер в $m_0 = 1{,}0$ мг радиоизотопа церия $^{144}_{58}Ce$ распадается в течение промежутков времени: 1) $\Delta t = 1$ с; 2) $\Delta t = 1$ год. Период полураспада церия $T = 285$ сут.

Решение. Задача решается с помощью закона радиоактивного распада.

1. Так как $\Delta t \ll T$, то можно считать, что в течение всего промежутка Δt число нераспавшихся ядер остается практически постоянным и равным их начальному числу N_0. Тогда для нахождения числа распавшихся ядер ΔN применим закон радиоактивного распада в форме (30.1), записав его так:

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t,$$

или, учитывая (30.3),

$$\Delta N = \frac{\ln 2}{T} N_0 \Delta t.$$

Чтобы определить начальное число ядер (атомов) N_0, умножим постоянную Авогадро N_A на число молей ν, содержащихся в данном препарате:

$$N_0 = N_A \nu = N_A (m_0/\mu), \qquad (1)$$

где m_0 — начальная масса m_0 препарата, μ — молярная масса изотопа $^{144}_{58}Ce$, численно равная (приблизительно) его массовому числу. С учетом (1) получим

$$\Delta N = \frac{\ln 2 \cdot N_A m_0 \Delta t}{T \mu}. \qquad (2)$$

Выразим числовые значения величин, входящих в формулу (2), в единицах СИ $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $m_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ кг; $\Delta t = 1$ с, $T = 285 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $\mu = 0{,}144$ кг/моль. Произведя вычисление с учетом, что $\ln 2 = 0{,}693$, найдем

$$\Delta N = 1{,}2 \cdot 10^{11}.$$

2 Так как теперь Δt, T — величины одного порядка, то дифференциальная форма (30.1) закона радиоактивного распада здесь неприменима. Поэтому для решения задачи воспользуемся интегральной формой (30.2) закона, справедливой для любого промежутка Δt. Тогда получим

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}),$$

или, учитывая (30.3) и (1),

$$\Delta N = \frac{N_A m_0}{\mu} (1 - e^{-(\ln 2)\, t/T}).$$

Так как $e^{\ln 2} = 2$, то уравнение принимает более простой вид:

$$\Delta N = \frac{N_A m_0}{\mu} (1 - 2^{-t/T}). \qquad (3)$$

Произведя вычисление по (3), найдем

$$\Delta N = 2{,}5 \cdot 10^{18}.$$

30-3. Радиоизотоп A_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп A_2 с постоянной распада λ_2. Считая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа A_1, найти, через сколько времени активность радиоизотопа A_2 достигнет максимума?

Решение. Активность препарата, определяемая соотношением (30.4), пропорциональна числу наличных ядер N этого препарата. Поэтому активность a радиоизотопа A_2 достигнет максимума тогда, когда максимальным будет число ядер N_2 этого радиоизотопа. Закон изменения со временем числа ядер N_2 выражается формулой (30.5). Для отыскания промежутка времени t, которому соответствует максимум функции $N_2(t)$, продифференцируем эту функцию по времени и приравняем нулю производную:

$$N_2'(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Решив это уравнение относительно t, найдем искомое время:

$$t = \frac{\ln(\lambda_1 / \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

30-4. Найти активность радона, образовавшегося из $m_0 = 1{,}00$ г радия $^{226}_{88}Ra$ за одни сутки. Найти также максимальную активность радона. Периоды полураспада радия и радона соответственно равны $T_1 = 1{,}6 \times \times 10^3$ лет, $T_2 = 3{,}8$ сут.

Решение. Используя соотношения (30.4), (30.5), запишем для искомой активности

$$a_2 = \lambda_2 N_2 = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Входящие сюда величины $N_1(0)$, λ_1, λ_2 выразим через данные m_0, μ, T_1, T_2 по (30.3) и формуле (1) задачи № 30-2. Тогда, произведя сокращение, имеем

$$a_2 = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1 - T_2} (e^{-(\ln 2)\cdot t/T_1} - e^{-(\ln 2)\cdot t/T_2}), \qquad (1)$$

где N_A — постоянная Авогадро. Это общая формула, выражающая закон изменения со временем активности одного радиоизотопа (дочернего), полученного в процессе распада другого (материнского). В данном случае формулу (1) можно упростить, если учесть вытекающие из условия соотношения $T_1 \gg T_2$ и $T_1 \gg t$. Из первого неравенства следует, что можно пренебречь величиной T_2 в разности $T_1 - T_2$. В силу второго неравенства можно принять за единицу первый член, стоящий в скобках. Тогда найдем

$$a_2 = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1} (1 - e^{-(\ln 2)\cdot t/T_2}). \qquad (2)$$

Произведя расчет по (2), получим

$$a_2 = 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0{,}83) \text{ расп/с, или } a_2 = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0{,}83)}{3{,}7 \cdot 10^{10}} \text{ Ки} = = 0{,}17 \text{ Ки}$$

Чтобы вычислить максимум активности $(a_2)_{макс}$ радона, можно, используя результат предыдущей задачи, найти промежуток времени $t_{макс}$, в течение которого активность радона достигнет максимума, а затем по формуле (1) определить величину $(a_2)_{макс}$, соответствующую времени $t_{макс}$. Однако можно поступить проще. Анализируя приближенную формулу (2), полученную с учетом неравенств $T_1 \gg T_2$, $T_1 \gg t$, видим, что с ростом времени t величина, стоящая в скобках, приближается по экспоненте к единице. Следовательно,

$$(a_2)_{макс} = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ расп/с} = 1{,}0 \text{ Ки}.$$

Замечание. Последнее равенство можно переписать, учитывая (30.4), так:

$$(a_2)_{макс} = N_1(0)\lambda_1 = a_1(0),$$

т. е. максимальная активность радона, возникающего при распаде радия, равна начальной активности самого радия.

Полученный результат легко понять, если учесть два обстоятельства: 1) вследствие весьма большой величины T_1 число нераспавшихся ядер радия в течение промежутка $t_{макс}$ остается практически постоянным. Поэтому остается постоянной и активность радия; 2) максимальной активности радона соответствует состояние *радиоактивного равновесия*, которое установится между радием и радоном через промежуток $t_{макс}$. При этом число ежесекундно распадающихся ядер радия (из каждого ядра радия образуется одно ядро радона) равно числу распадающихся атомов радона, а это и означает равенство активностей этих элементов.

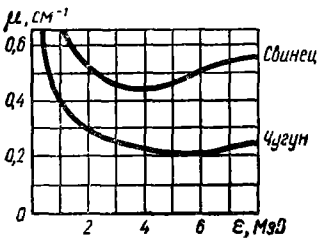

Рис 30-1

30-5. Интенсивность узкого пучка монохроматических γ-лучей после прохождения через слой свинца толщиной $x = 2{,}00$ см уменьшается в 2,9 раза, а после прохождения через слой чугуна такой же толщины — в 1,6 раза. Используя зависимость линейного коэффициента ослабления μ γ-лучей от энергии ε γ-квантов (рис. 30-1), определить энергию γ-квантов в данном пучке.

Решение. Чтобы воспользоваться данным графиком, необходимо сначала найти коэффициент ослабления μ. Из формулы (30.6) имеем

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \frac{I_0}{I}. \qquad (1)$$

Подставив $x = 2{,}00$ см и $I_0/I = 2{,}9$ и произведя вычисление, получим для свинца $\mu_{св} = 0{,}54$ см$^{-1}$. Этой величине $\mu_{св}$ соответствуют на графике два значения энергии γ-квантов: $\varepsilon_1 = 1{,}8$ МэВ и $\varepsilon_2 = 7{,}0$ МэВ.

Подставив в (1) $x = 2{,}00$ см и $I_0/I = 1{,}6$, вычислим величину μ для чугуна: $\mu_{чуг} = 0{,}23$ см$^{-1}$. Теперь по графику находим: $\varepsilon_1 = 4{,}0$ Мэв и $\varepsilon_2 = 7{,}0$ МэВ.

Так как в обоих случаях через различные вещества проходят *одни и те же* γ-лучи, то для энергии γ-квантов следует принять значение $\varepsilon = 7{,}0$ МэВ.

§ 31. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Основные формулы

Энергия связи ядра, т. е. энергия, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы без сообщения им кинетической энергии, вычисляется по формуле

$$\Delta W = c^2 \Delta m, \qquad (31.1)$$

или

$$\Delta W = c^2 [Zm_p + (A - Z) m_n - m_я], \qquad (31.2)$$