Добавление А

К ВЫВОДУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

В § 8 были выведены уравнения, которым должны удовлетворять функции преобразования

$$x'_i = f_i(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{A.01}$$

для того, чтобы были выполнены следующие два условия:

(а) прямолинейному и равномерному движению в координатах (x_i) должно соответствовать такое же движение в координатах (x'_i);

(б) прямолинейному и равномерному движению *со скоростью света* в координатах (x_i) должно соответствовать такое же движение в координатах (x'_i).

Условие (б) равносильно следующему условию:

(б′) уравнению фронта волны

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right] = 0 \tag{A.02}$$

в координатах (x_i) должно соответствовать такое же уравнение в координатах (x'_i).

В § 8 было показано, что функции, удовлетворяющие условию (а), должны быть решениями системы уравнений

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \psi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \psi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \tag{A.03}$$

тогда как функции, удовлетворяющие условию (б) или (б′), должны быть решениями системы уравнений

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \varphi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \varphi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - e_k \delta_{kl} \sum_{m=0}^{3} e_m \varphi_m \frac{\partial f_i}{\partial x_m}, \tag{A.04}$$

где

$$\varphi_m = \frac{\partial}{\partial x_m} \lg \sqrt{\lambda}, \tag{A.05}$$

причем уравнения (A.04) получаются в результате дифференцирования соотношений

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \lambda e_k \delta_{kl} \,. \tag{A.06}$$

Мы видели, что при одновременном наложении обоих условий (а) и (б) или же (а) и (б′) получается

$$\psi_l = \varphi_l = 0, \tag{A.07}$$

а тогда уравнения (A.03) и (A.04) приводятся к равенству нулю всех вторых производных от функций f_i, т. е. к линейности этих функций. Величина λ будет вследствие (A.05) и (A.07) постоянной (масштабный множитель). Как показано в § 9, масштабный множитель λ можно положить равным единице, после чего соотношения (A.06) приводят, в силу линейности функций f_i, к преобразованию Лоренца.

Мы должны теперь исследовать, что вытекает из условия (а) в отдельности и из условия (б) или (б′) в отдельности.

Как уравнения (A.03), так и уравнения (A.04) могут быть написаны в виде

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{r=0}^{3} \Gamma_{kl}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial x_r}, \tag{A.08}$$

где в случае (A.03)

$$\Gamma_{kl}^{r} = \psi_l \delta_{rk} + \psi_k \delta_{rl} \tag{A.09}$$

и в случае (A.04)

$$\Gamma_{kl}^{r} = \varphi_l \delta_{rk} + \varphi_k \delta_{rl} - e_r e_k \varphi_r \delta_{kl}. \tag{A.10}$$

[В § 8 величины (A.09) обозначались символом Δ_{kl}^{r}.]

Уравнения вида (A.08) подробно исследованы в § 42, где дано необходимое и достаточное условие их полной интегрируемости. Это условие имеет вид:

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}^{m}}{\partial x_n} - \frac{\partial \Gamma_{kn}^{m}}{\partial x_l} + \sum_{r=0}^{3} (\Gamma_{kl}^{r} \Gamma_{rn}^{m} - \Gamma_{kn}^{r} \Gamma_{rl}^{m}) = 0. \tag{A.11}$$

Оно выводится из требования, чтобы получаемые путем дифференцирования (A.08) различные выражения для третьих производных от f_i были друг другу равны.

Подставляя в (A.11) выражение (A.09), получаем:

$$\left(\frac{\partial \psi_l}{\partial x_n} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l}\right) \delta_{mk} + \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} - \psi_k \psi_n\right) \delta_{ml} - \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} - \psi_k \psi_l\right) \delta_{mn} = 0. \tag{A.12}$$

Полагая здесь $k \neq m$; $l \neq m$, но $n = m$, получаем

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} - \psi_k \psi_l = 0. \tag{A.13}$$

Так как в (А.12) значок m может иметь любое значение, то ограничение $k \neq m$, $l \neq m$ несущественно, и равенство (А.13) должно иметь место при всех значениях k и l. Очевидно, что это равенство является также и достаточным для выполнения (А.12). В самом деле, из него следует

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \psi_l}{\partial x_k}, \tag{A.14}$$

и первый член в (А.12) также обращается в нуль.

Подставим теперь в (А.11) выражение (А.10). Вследствие (А.05) мы можем положить

$$\varphi_{kl} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k} = \varphi_{lk}. \tag{A.15}$$

Вычисляя левую часть (А.11), мы получим, после умножения на e_m

$$(\varphi_{kn} - \varphi_k \varphi_n) e_m \delta_{lm} - (\varphi_{kl} - \varphi_k \varphi_l) e_m \delta_{nm} + \\ + (\varphi_{lm} - \varphi_l \varphi_m) e_k \delta_{kn} - (\varphi_{mn} - \varphi_m \varphi_n) e_k \delta_{kl} + \\ + e_k e_m (\delta_{kn}\delta_{lm} - \delta_{kl}\delta_{nm}) \sum_{r=0}^{3} e_r \varphi_r^2 = 0. \tag{A.16}$$

Положив

$$\Phi_{kl} = \varphi_{kl} - \varphi_k \varphi_l + \frac{1}{2} e_k \delta_{kl} \sum_{r=0}^{3} e_r \varphi_r^2, \tag{A.17}$$

мы можем равенство (А.16) написать в виде

$$\Phi_{kn} e_m \delta_{lm} - \Phi_{kl} e_m \delta_{nm} + \Phi_{lm} e_k \delta_{kn} - \Phi_{mn} e_k \delta_{kl} = 0. \tag{A.18}$$

Отсюда нетрудно вывести, что должно быть

$$\Phi_{kl} = 0. \tag{A.19}$$

В самом деле, умножая левую часть (А.18) на $-e_m$, полагая $m = n$ и суммируя по m, получаем:

$$2\Phi_{kl} + e_k \delta_{kl} \sum_{m=0}^{3} e_m \Phi_{mm} = 0. \tag{A.20}$$

Умножая левую часть (А.20) на e_k, полагая $k = l$ и суммируя по k, получаем, по сокращении на числовой множитель 6:

$$\sum_{m=0}^{3} e_m \Phi_{mm} = 0. \tag{A.21}$$

Таким образом, условием интегрируемости уравнений (А.03) являются равенства (А.13), а условием интегрируемости уравнений (А.04) являются равенства (А.19). Вследствие (А.14) и (А.15) мы можем положить

$$\psi_k = \frac{\partial \psi}{\partial x_k}; \quad \varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \tag{A.22}$$

где ψ и φ — некоторые неизвестные функции [вследствие (А.05) мы можем считать, что $\varphi = \lg \sqrt{\lambda}$]. Условия интегрируемости напишутся тогда

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_l} = 0, \tag{А.23}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \frac{1}{2} e_k \delta_{kl} \sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)^2 = 0. \tag{А.24}$$

Полагая здесь

$$e^{-\psi} = w; \quad \psi = -\lg w, \tag{А.25}$$

а также

$$e^{-\varphi} = u; \quad \varphi = -\lg u, \tag{А.26}$$

получим для новых неизвестных функций уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \tag{А.27}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} e_k \delta_{kl} \cdot \frac{1}{u} \sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2. \tag{А.28}$$

Уравнение (А.27) показывает, что w есть линейная функция от координат

$$w = w(0) + w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \tag{А.29}$$

и что, следовательно,

$$\psi_k = -\frac{w_k}{w}, \tag{А.30}$$

где w_k — постоянные. Подставляя эти значения ψ_k в уравнение (А.03) для f_i, можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 (w f_i)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \tag{А.31}$$

откуда следует, что величины wf_i являются линейными функциями. Это значит, что четыре функции f_0, f_1, f_2, f_3 являются дробно-линейными функциями с одним и тем же знаменателем w.

Мы приходим к следующему выводу. Самый общий вид преобразования (А.01), удовлетворяющего условию (а), есть преобразование при помощи дробно-линейных функций с одним и тем же знаменателем. В том частном случае, когда знаменатель приводится к постоянной, дробные функции приводятся к целым.

Обратимся теперь к исследованию уравнения (А.28), вытекающего из условия (б) или (б′). Прежде всего заметим, что при $k \neq l$ правая часть его обращается в нуль. Следовательно, вторые производные от u по разным переменным равны нулю, и функция u составлена аддитивно из функций от одной переменной. С другой стороны, из

(A.28) следует, что вторые производные от u, взятые по одной и той же переменной, с точностью до знака друг другу равны, а именно:

$$e_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = e_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = e_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = e_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{A.32}$$

Но каждая из величин (A.32) может зависеть, самое большее, от одной (своей) переменной. Следовательно, все они равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через $2C$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 2Ce_k; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \qquad (k \neq l) \tag{A.33}$$

и, кроме того,

$$\sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2 = 4Cu. \tag{A.34}$$

Из равенств (A.33) следует, что функция u будет вида

$$u = C \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + B, \tag{A.35}$$

где α_k и B — постоянные. Формула же (A.34) дает лишь соотношение между постоянными, а именно:

$$BC = \sum_{r=0}^{3} e_r \alpha_r^2. \tag{A.36}$$

Согласно (A.05) и (A.26), множитель λ в соотношениях (A.06) обратно пропорционален u^2. Мы можем положить

$$\sum_i e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \frac{1}{u^2} e_k \delta_{kl}. \tag{A.37}$$

Без нарушения общности мы можем считать, что в начале координат, т. е. при $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, будет $u = 1$; этого можно всегда достигнуть изменением масштаба для f_i или для x_k. При таком условии будет

$$B = 1; \quad C = \sum_{r=0}^{3} e_r \alpha_r^2 \tag{A.38}$$

и следовательно

$$u = 1 - 2 \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k^2 \sum_{l=0}^{3} e_l x_l^2. \tag{A.39}$$

Заменяя в (A.04) величины φ_k их выражениями

$$\varphi_k = -\frac{u_k}{u}; \quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \tag{A.40}$$

будем иметь

$$u\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}+u_k\frac{\partial f_i}{\partial x_l}+u_l\frac{\partial f_i}{\partial x_k}=e_k\delta_{kl}\sum_{m=0}^{3}e_m u_m\frac{\partial f_i}{\partial x_m}. \qquad (A.41)$$

Если u имеет вид (А.39), то условия интегрируемости системы (А.41) будут выполнены, и функции f_i вполне определяются значениями их и их первых производных в начале координат. Пусть эти значения равны

$$(f_i)_0=a_i;\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_0=e_k a_{ik}. \qquad (A.42)$$

Так как в начале координат $u=1$, то уравнение (А.37) дает

$$\sum_{i=0}^{3}e_i a_{ik}a_{il}=e_k\delta_{kl}. \qquad (A.43)$$

Положим теперь

$$f_i=a_i+\sum_{r=0}^{3}e_r a_{ir}f_r^*. \qquad (A.44)$$

Вследствие (А.43) эти уравнения могут быть решены относительно функций f_r^*, которые выражаются линейным образом через f_i. Очевидно, что функции f_r^* удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений, как и f_i; для системы (А.41) это вытекает из линейности уравнений; для системы (А.37) это вытекает из соотношений (А.43). Но начальные условия для f_r^* будут вида

$$(f_r^*)_0=0;\quad \left(\frac{\partial f_r^*}{\partial x_k}\right)_0=\delta_{rk}. \qquad (A.45)$$

Таким образом, найдя решение системы (А.41) с начальными условиями частного вида (А.45), мы получим по формуле (А.44) самое общее решение этой системы.

Систему (А.41) можно написать в виде

$$\frac{\partial^2(uf_i^*)}{\partial x_k \partial x_l}=f_i^*\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}+e_k\delta_{kl}\sum_{m=0}^{3}e_m u_m\frac{\partial f_i^*}{\partial x_m} \qquad (A.46)$$

и вследствие (А.33)

$$\frac{\partial^2(uf_i^*)}{\partial x_k \partial x_l}=e_k\delta_{kl}\left(2Cf_i^*+\sum_{m=0}^{3}e_m u_m\frac{\partial f_i^*}{\partial x_m}\right). \qquad (A.47)$$

Положим здесь

$$f_i^*=\frac{F_i}{u}. \qquad (A.48)$$

Используя (А.34), мы получим

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_l} = e_k \delta_{kl} \cdot \frac{1}{u}\left(-2CF_i + \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial F_i}{\partial x_m}\right). \qquad (А.49)$$

Рассуждая так же, как при исследовании уравнения (А.28), получаем

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_l} = 2C_i e_k \delta_{kl}, \qquad (А.50)$$

причем

$$-2CF_i + \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial F_i}{\partial x_m} = 2C_i u. \qquad (А.51)$$

Из (А.48) легко видеть, что начальные условия (А.45) для f_i^* приводят к условиям того же вида для F_i. Уравнения (А.50) вместе с начальными условиями дают

$$F_i = C_i \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 + x_i. \qquad (А.52)$$

Подстановка (А.52) в (А.51) позволяет определить значения постоянных C_i, а именно

$$C_i = -\alpha_i. \qquad (А.53)$$

С этими значениями постоянных уравнения (А.51) приводятся к тождеству. Следовательно, мы имеем

$$F_i = x_i - \alpha_i \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 \qquad (А.54)$$

и

$$f_i^* = \frac{x_i - \alpha_i \sum\limits_{k=0}^{3} e_k x_k^2}{1 - 2\sum\limits_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + \sum\limits_{k=0}^{3} e_k \alpha_k^2 \sum\limits_{l=0}^{3} e_l x_l^2}. \qquad (А.55)$$

Мы приходим к следующему окончательному выводу.

Самый общий вид преобразования (А.01), удовлетворяющего условию (б) или (б′), получается из преобразования

$$x_i^* = \frac{x_i - \alpha_i \sum\limits_{k=0}^{3} e_k x_k^2}{1 - 2\sum\limits_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + \sum\limits_{k=0}^{3} e_k \alpha_k^2 \sum\limits_{l=0}^{3} e_l x_l^2} \qquad (А.56)$$

в соединении с преобразованием

$$x'_i = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} \overset{*}{x}_k, \tag{А.57}$$

где коэффициенты a_{ik} удовлетворяют условиям (А.43). Кроме того, возможно изменение масштаба.

Преобразование (А.57) есть обычное преобразование Лоренца. Преобразование же (А.56) носит название преобразования Мебиуса. Оно обладает многими замечательными свойствами, на которых мы, однако, останавливаться не будем.

Для нас важно отметить, что требование сохранения вида уравнения фронта волны [условие (б′)] само по себе еще не приводит к преобразованию Лоренца, так как допускает еще преобразование Мебиуса. Чтобы освободиться от преобразования Мебиуса, можно дополнительно потребовать, чтобы конечным значениям первоначальных координат соответствовали конечные значения преобразованных координат. Это дополнительное требование выполняется только если все постоянные α_k в преобразовании Мебиуса равны нулю, в результате чего оно приводится к тождеству. Вместо этого дополнительного требования можно принять другое, а именно наложить условие сохранения прямолинейности и равномерности движения [условие (а)]; мы так и поступали в тексте. Каждое из этих дополнительных требований приводит однозначно к преобразованию Лоренца (и к возможному изменению масштаба).

Существенно также, что требование конечности координат относится ко всему пространству-времени в целом, тогда как условие сохранения прямолинейности и равномерности движения является строго локальным *).

---

*) Рассуждения и выводы этого Добавления примыкают к результатам Вейля [7].