Добавление Б

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРА ЭЙНШТЕЙНА

а) Преобразование тензора кривизны второго ранга *). Мы начнем с преобразования ковариантного тензора кривизны второго ранга $R_{\mu\nu}$ и покажем, что в нем можно выделить члены, содержащие оператор Даламбера от одноименной компоненты $g_{\mu\nu}$ фундаментального тензора.

По определению мы имеем

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\,\beta\nu}, \tag{Б.01}$$

где, согласно (44.08), тензор кривизны четвертого ранга равен

$$R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\, \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\, \partial x_\alpha}\right) - \\ - g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \tag{Б.02}$$

[эта формула отличается от (44.08) только наименованием значков]. Следовательно,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\, \partial x_\beta} - \\ - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\, \partial x_\alpha} - g^{\alpha\beta} g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma_\rho. \tag{Б.03}$$

Мы положили здесь для краткости

$$\Gamma_\rho = g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma, \tag{Б.04}$$

где, в соответствии с обозначением (41.15),

$$\Gamma^\sigma = g^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}. \tag{Б.05}$$

В формуле (Б.03) первый член уже имеет вид оператора Даламбера от $g_{\mu\nu}$. Остальные члены могут быть преобразованы так, что вторые

---

*) См. также работы де Дондера [16] и Ланчоса [17].

производные от фундаментального тензора будут входить только через посредство первых производных от величин Γ_ρ. Для выполнения преобразования нам понадобятся формулы:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\lg(-g) = g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}, \tag{Б.06}$$

$$g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} = -g_{\alpha\nu}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}, \tag{Б.07}$$

$$\Gamma^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\right), \tag{Б.08}$$

уже выведенные нами в § 41. Из этих формул следует

$$\Gamma_\nu = g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\nu}. \tag{Б.09}$$

Дифференцируя (Б.06) по x_ν, получим

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{Б.10}$$

Заметим, что вследствие симметрии выражения (Б.10) относительно μ и ν, мы имеем

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{Б.11}$$

Дифференцируя выражение (Б.09) по x_μ, будем иметь

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}. \tag{Б.12}$$

В последнем члене правой части мы можем заменить величину $\dfrac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}$ на

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha}\right) = \Gamma_{\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}, \tag{Б.13}$$

где $\Gamma_{\nu,\alpha\beta}$ — обычные скобки Кристоффеля первого рода (38.28). Формула (Б.12) напишется тогда

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \Gamma_{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{Б.14}$$

Переставляя здесь значки μ и ν (а также значки суммирования α и β в левой части), можем написать

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \Gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{Б.15}$$

Таким образом, входящая в (Б.03) $\left(\text{с множителем } \frac{1}{2}\right)$ сумма выражений (Б.10), (Б.14) и (Б.15) равна

$$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu}\right) + \Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \Gamma_{\mu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} \tag{Б.16}$$

вследствие (Б.11) остальные члены здесь сокращаются].

Введем обозначение

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu}\right) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma_\rho. \tag{Б.17}$$

Величина $\Gamma_{\mu\nu}$ составлена по аналогии с полусуммой ковариантных производных от вектора, хотя Γ_ν не есть вектор. Вследствие (Б.16) выражение (Б.03) для $R_{\mu\nu}$ напишется тогда:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma_{\mu\nu} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\,\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}. \tag{Б.18}$$

Для упрощения выкладок, связанных с преобразованием членов с первыми производными, мы будем пользоваться не только обозначениями $\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}$ и $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ для обычных скобок Кристоффеля, но и обозначениями

$$\Gamma^{\alpha\beta}_\mu = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma_{\mu,\,\rho\sigma} \tag{Б.19}$$

$$\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\,\rho\sigma} \tag{Б.20}$$

для соответствующих величин с поднятыми значками. Заметим, что величина $\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}$ равна

$$\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\rho}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} - g^{\alpha\rho}\frac{\partial g^{\beta\mu}}{\partial x_\rho} - g^{\beta\rho}\frac{\partial g^{\alpha\mu}}{\partial x_\rho}\right). \tag{Б.21}$$

Рассмотрим выражение

$$A_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\,\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}, \tag{Б.22}$$

последний член которого совпадает с последним членом в (Б.18). Написав его в виде

$$A_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\sigma,\,\mu\beta}\Gamma_{\rho,\,\nu\alpha}\right), \tag{Б.23}$$

подставим сюда

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta} = \Gamma_{\sigma,\,\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\,\sigma\beta}. \tag{Б.24}$$

и затем воспользуемся равенством

$$\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha}-\Gamma_{\rho,\,\nu\alpha}=\Gamma_{\nu,\,\rho\alpha}. \tag{Б.25}$$

Мы получим тогда

$$A_{\mu\nu}=g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\left(\Gamma_{\sigma,\,\mu\beta}\Gamma_{\nu,\,\rho\alpha}+\Gamma_{\mu,\,\sigma\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{Б.26}$$

Применяя обозначение (Б.19) и переименовывая значки, можем написать:

$$A_{\mu\nu}=\Gamma_\nu^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha,\,\mu\beta}+\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{Б.27}$$

Так как коэффициент $\Gamma_\nu^{\alpha\beta}$ здесь симметричен относительно α и β, мы можем множитель при нем заменить его симметричной частью, которая равна $\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}$. По той же причине мы можем заменить $\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}$ выражением (Б.13). Сделав это, получим

$$A_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Gamma_\nu^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}+\frac{1}{2}\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}. \tag{Б.28}$$

Но, как легко проверить,

$$\Gamma_\nu^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}=-\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{Б.29}$$

Поэтому

$$A_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}-\frac{1}{2}\Gamma_{\mu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu,\alpha\beta}. \tag{Б.30}$$

Приравнивая выражения (Б.22) и (Б.30) для $A_{\mu\nu}$, получаем соотношение

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}+\frac{1}{2}\Gamma_{\mu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}-g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\,\mu\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma}=&\\ =\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}-g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha},&\end{aligned} \tag{Б.31}$$

которое позволяет написать выражение для $R_{\mu\nu}$ в следующем окончательном виде:

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Gamma_{\mu\nu}-g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha}+\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}. \tag{Б.32}$$

Отсюда уже легко получить формулу для контравариантных составляющих тензора кривизны второго ранга.

Дифференцируя соотношения вида (Б.07), нетрудно вывести формулу

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\frac{\partial^2 g^{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=-\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{Б.33}$$

Используя эту формулу, можно написать $R_{\mu\nu}$ в виде:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma_{\mu\nu} + \Gamma_\mu^{\alpha\beta} \Gamma_{\nu, \alpha\beta}. \tag{Б.34}$$

Поднимая затем значки μ и ν, получаем для $R^{\mu\nu}$ следующее простое выражение:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu, \alpha\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{Б.35}$$

Величина $\Gamma^{\mu\nu}$ получается из $\Gamma_{\mu\nu}$ поднятием значков по формуле

$$\Gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Gamma_{\rho\sigma} \tag{Б.36}$$

и может быть выражена непосредственно через величины Γ^α, определяемые формулой (Б.08), а именно:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \Gamma^\alpha\right). \tag{Б.37}$$

б) Преобразование инварианта. Составим теперь инвариант тензора кривизны

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}. \tag{Б.38}$$

Мы имеем

$$R = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma + \Gamma_\nu^{\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\beta}, \tag{Б.39}$$

где через Γ обозначена величина

$$\Gamma = g_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu}. \tag{Б.40}$$

Используя формулу

$$\frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\alpha} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}, \tag{Б.41}$$

мы получим из (Б.37)

$$\Gamma = \frac{\partial \Gamma^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\alpha} \Gamma^\alpha \tag{Б.42}$$

и вследствие (41.16)

$$\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial^2 (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{Б.43}$$

Дифференцируя формулу (Б.41) по x_β, мы получим аналогично (Б.10):

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{Б.44}$$

Подставляя (Б.44) в (Б.39), будем иметь:

$$R = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma + \Gamma_\nu^{\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{Б.45}$$

Мы видим, что вторые производные от фундаментального тензора входят в выражение для R только через посредство вторых производных от $\lg(-g)$, а также через посредство величины Γ. Члены с первыми производными можно преобразовать при помощи соотношения

$$\Gamma_\nu^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\nu+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}=\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta}^\nu\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}, \tag{Б.46}$$

которое легко выводится из формулы

$$\Gamma_\nu^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g_{\rho\nu}\left(g^{\sigma\beta}\frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x_\sigma}+g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g^{\rho\beta}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{Б.47}$$

В результате получается

$$R=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\lg(-g)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\Gamma+\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta}^\nu\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{Б.48}$$

Это выражение можно написать в виде

$$R=g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\Gamma^\alpha\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}-\Gamma-L, \tag{Б.49}$$

где

$$L=-\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta}^\nu\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}-\Gamma^\alpha\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}. \tag{Б.50}$$

Припоминая формулу

$$\Box y=g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\Gamma^\alpha\frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \tag{Б.51}$$

для оператора Даламбера от некоторой функции y, мы можем написать

$$R=\Box\left(\lg\sqrt{-g}\right)-\Gamma-L. \tag{Б.52}$$

Разумеется, величина $y=\lg\sqrt{-g}$ не есть скаляр, но формально оператор (Б.51) может быть применен и к ней. Заметим, что как первый, так и второй член в (Б.52) представляют деленную на $\sqrt{-g}$ сумму производных от некоторых величин по координатам. Это обстоятельство имеет значение при формулировке вариационного начала для уравнений Эйнштейна, причем определяемая формулой (Б.50) величина L играет роль функции Лагранжа.

Функция Лагранжа L может быть написана, помимо (Б.50), в различных других видах, из которых укажем следующие:

$$L=\frac{1}{2}\Gamma^{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}-\Gamma^\alpha\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}, \tag{Б.53}$$

а также

$$L=g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\alpha}^\beta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha-\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\Gamma_{\alpha\beta}^\beta). \tag{Б.54}$$

Последняя форма наиболее часто встречается в литературе.

в) Преобразование тензора Эйнштейна. Предыдущие формулы позволяют написать выражение для тензора Эйнштейна

$$G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \tag{Б.55}$$

расходимость которого равна нулю. При этом окажется, что вторые производные от фундаментального тензора входят в $G^{\mu\nu}$ только через посредство вторых производных от величины $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ и через посредство первых производных от Γ^ν. Поэтому удобно ввести особое обозначение для умноженных на $\sqrt{-g}$ контравариантных компонент фундаментального тензора.

Мы положим

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}=\sqrt{-g}g^{\mu\nu}. \tag{Б.56}$$

Формула (41.16) напишется тогда:

$$\Gamma^\nu=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu}. \tag{Б.57}$$

Для дальнейшего удобно преобразовать все формулы так, чтобы в них входили только производные от величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. При выполнении преобразования в наши формулы войдут производные от величины

$$y=\lg\sqrt{-g}, \tag{Б.58}$$

которые мы будем обозначать через

$$y_\alpha=\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}. \tag{Б.59}$$

Согласно (41.07), мы имеем

$$y_\alpha=\Gamma^\nu_{\alpha\nu}. \tag{Б.60}$$

Для величин, получающихся из y_α путем поднятия значков, мы введем обозначение

$$y^\alpha=g^{\alpha\beta}y_\beta, \tag{Б.61}$$

аналогичное тензорному (хотя, конечно, y^α не есть вектор). Мы имеем также

$$y^\alpha=\Gamma^{\alpha\beta}_\beta, \tag{Б.62}$$

где $\Gamma^{\alpha\beta}_\mu$ имеет значение (Б.19). Вторые производные от y мы будем обозначать через $y_{\alpha\beta}$:

$$y_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}. \tag{Б.63}$$

Согласно формуле (Б.21), величины $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ представляют билинейные функции от составляющих $g^{\mu\nu}$ и от их первых производных

Подставляя в эту формулу выражения для $g^{\mu\nu}$ через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, мы получим

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta}=\Pi^{\mu,\alpha\beta}+\Delta^{\mu,\alpha\beta}, \tag{Б.64}$$

где

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta}=\frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\rho}+\mathfrak{g}^{\beta\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\rho}-\mathfrak{g}^{\mu\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho}\right), \tag{Б.65}$$

$$\Delta^{\mu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}(y^\alpha g^{\mu\beta}+y^\beta g^{\mu\alpha}-y^\mu g^{\alpha\beta}). \tag{Б.66}$$

Соответствующие величины с опущенными значками мы будем обозначать через $\Pi^\mu_{\alpha\beta}$ и $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$.

Вычислим определитель, составленный из $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$

$$\mathrm{Det}\,\mathfrak{g}^{\mu\nu}=(\sqrt{-g})^4\,\mathrm{Det}\,g^{\mu\nu}=g^2\cdot\frac{1}{g}=g. \tag{Б.67}$$

Таким образом, определитель, составленный из $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, равен определителю, составленному из $g_{\mu\nu}$:

$$\mathrm{Det}\,\mathfrak{g}^{\mu\nu}=\mathrm{Det}\,g_{\mu\nu}=g. \tag{Б.68}$$

Из формулы (Б.66) получаем

$$g_{\alpha\beta}\Delta^{\mu,\alpha\beta}=-y^\mu, \tag{Б.69}$$

а так как

$$g_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu,\alpha\beta}=\Gamma^\mu, \tag{Б.70}$$

то

$$g_{\alpha\beta}\Pi^{\mu,\alpha\beta}=\Gamma^\mu+y^\mu. \tag{Б.71}$$

Последнее выражение равно также

$$\Gamma^\mu+y^\mu=-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{Б.72}$$

Переходим к преобразованию тензора Эйнштейна

$$G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \tag{Б.55}$$

Исходными формулами являются здесь

$$R^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Gamma^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}, \tag{Б.35}$$

а также формула (Б.49) для R, которую мы напишем в виде

$$R=g^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}-\Gamma^\alpha y_\alpha-\Gamma-L. \tag{Б.73}$$

Вторая производная от величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ равна

$$\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=\sqrt{-g}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+y_\beta\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+y_\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta}+y_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}+y_\alpha y_\beta g^{\mu\nu}\right) \tag{Б.74}$$

и, следовательно,

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=\sqrt{-g}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+2y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}+g^{\mu\nu}y_\alpha y^\alpha\right). \tag{Б.75}$$

С другой стороны, мы имеем

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha y_\alpha+\Gamma+L)-\Gamma^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{Б.76}$$

Из сравнения последних двух формул мы видим, что, если не считать членов Γ и $\Gamma^{\mu\nu}$, в них входят одни и те же комбинации вторых производных. Вычисление дает:

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+$$
$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(y_\alpha y^\alpha+\Gamma^\alpha y_\alpha+\Gamma+L)-\Gamma^{\mu\nu}+y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{Б.77}$$

Как всегда, наиболее сложным является преобразование членов с первыми производными. Мы имеем:

$$\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}=\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\nu,\,\alpha\beta}\Pi^\mu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Lambda^\nu_{\alpha\beta}. \tag{Б.78}$$

Используя (Б.71), получаем:

$$\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\nu,\,\alpha\beta}\Pi^\mu_{\alpha\beta}=y_\rho(\Pi^{\nu,\,\mu\rho}+\Pi^{\mu,\,\nu\rho})-\frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu+y^\nu\Gamma^\mu)-y^\mu y^\nu, \tag{Б.79}$$

и, вследствие

$$\Pi^{\nu,\,\mu\rho}+\Pi^{\mu,\,\nu\rho}=\frac{1}{g}g^{\alpha\rho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=-g^{\alpha\rho}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-g^{\mu\nu}y^\rho, \tag{Б.80}$$

$$\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\nu,\,\alpha\beta}\Pi^\mu_{\alpha\beta}=$$
$$=-y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-g^{\mu\nu}y_\alpha y^\alpha-\frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu+y^\nu\Gamma^\mu)-y^\mu y^\nu. \tag{Б.81}$$

Далее

$$\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Lambda^\nu_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}y^\mu y^\nu+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}y_\alpha y^\alpha. \tag{Б.82}$$

Отсюда

$$\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}=\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}-y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-$$
$$-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}y_\alpha y^\alpha-\frac{1}{2}y^\mu y^\nu-\frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu+y^\nu\Gamma^\mu). \tag{Б.83}$$

Это соотношение позволяет переписать формулу (Б.77) в виде

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}y^\mu y^\nu+$$
$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}L+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha y_\alpha+\Gamma)-\Gamma^{\mu\nu}-\frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu+y^\nu\Gamma^\mu). \tag{Б.84}$$

Положим здесь

$$B^{\mu\nu} = \Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(y^{\mu}\Gamma^{\nu} + y^{\nu}\Gamma^{\mu}), \tag{Б.85}$$

$$B = g_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = \Gamma + \Gamma^{\alpha}y_{\alpha} \tag{Б.86}$$

и выразим в члене с оператором Даламбера величины $g^{\alpha\beta}$ через $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$. Тогда формула для тензора Эйнштейна напишется:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{1}{2g}\,\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\,\partial x_{\beta}} + \\ + \Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}L + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}B - B^{\mu\nu}. \tag{Б.87}$$

Поскольку определитель g выражается, согласно (Б.68), непосредственно через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, можно считать, что в формуле (Б.87) все члены, кроме L, выражены через величины $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ и их производные. Нам остается выразить через те же величины также и функцию Лагранжа L.

По определению (Б.50) мы имеем:

$$L = -\frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}y_{\alpha}. \tag{Б.88}$$

Подставим сюда

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}, \tag{Б.89}$$

где, согласно (Б.66),

$$\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(y_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + y_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha} - y^{\nu}g_{\alpha\beta}). \tag{Б.90}$$

Пользуясь формулой

$$\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} = -\Gamma^{\alpha}y_{\alpha}, \tag{Б.91}$$

легко выводимой из (Б.90), получим

$$L = -\frac{1}{2}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2}\Gamma^{\alpha}y_{\alpha}. \tag{Б.92}$$

Выразив здесь $\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}$ через

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} = \sqrt{-g}\left(\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} + g^{\alpha\beta}y_{\nu}\right) \tag{Б.93}$$

и используя формулу (Б.71), которую можно написать в виде

$$g^{\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\nu} + y^{\nu}, \tag{Б.94}$$

получаем окончательно:

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{1}{2}y_{\nu}y^{\nu}. \tag{Б.95}$$

Здесь под знаком производной стоят уже только величины $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$.