Добавление Д

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЕВКЛИДОВОСТИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Для трехмерного пространства тензор кривизны второго ранга R_{ik} обладает тем же числом компонент (а именно, шестью), как и тензор кривизны четвертого ранга $R_{il,\,mk}$. Поэтому следует ожидать, что не только R_{ik} выражается через $R_{il,\,mk}$ по общей формуле

$$R_{ik} = a^{lm} R_{il,\,mk}, \tag{Д.01}$$

но и, обратно, $R_{il,\,mk}$ выражается через R_{ik} (значок a при компонентах трехмерного тензора мы здесь опускаем).

Чтобы найти эти выражения, введем, подобно тому, как это мы делали в § 22 и § 37, антисимметричную систему величин ε_{ijh}, причем $\varepsilon_{123} = 1$, и построим антисимметричный псевдо-тензор с ковариантными компонентами

$$E_{ijh} = \sqrt{a}\,\varepsilon_{ijh} \tag{Д.02}$$

и контравариантными компонентами

$$E^{ijh} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\varepsilon_{ijh}. \tag{Д.03}$$

Для преобразований между координатами x_1, x_2, x_3 с положительным якобианом

$$D\binom{x'}{x} = \frac{D(x'_1, x'_2, x'_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} > 0 \tag{Д.04}$$

мы имеем

$$\sqrt{a'}\,D\binom{x'}{x} = \sqrt{a} \tag{Д.05}$$

и, следовательно,

$$E_{ijh}\,\frac{\partial x'_i}{\partial x_p}\,\frac{\partial x'_j}{\partial x_q}\,\frac{\partial x'_h}{\partial x_r} = E_{pqr} \tag{Д.06}$$

на основании правила составления определителей, что и доказывает, что для таких преобразований величины E_{ijh} ведут себя как ковариантный тензор. По правилу составления определителей мы можем также написать:

$$E_{ikl}a^{ip}a^{kq}a^{lr}=E^{pqr}, \tag{Д.07}$$

где E^{pqr} имеет значение (Д.03). Тем самым доказано, что E^{pqr} есть контравариантный псевдо-тензор, соответствующий E_{ikl}. Отсюда легко получаются формулы

$$E_{ikl}a^{kq}a^{lr}=E^{pqr}a_{ip}, \tag{Д.08}$$

$$E_{ikl}a^{lr}=E^{pqr}a_{ip}a_{kq}, \tag{Д.09}$$

$$E_{ikl}=E^{pqr}a_{ip}a_{kq}a_{lr}. \tag{Д.10}$$

Отметим также важную для дальнейшего формулу

$$E^{pqj}E_{rsj}=\delta_r^p\delta_s^q-\delta_s^p\delta_r^q, \tag{Д.11}$$

которая доказывается путем следующих рассуждений. Обе части ее отличны от нуля только когда $p\neq q$ и $r\neq s$, причем пара чисел (p, q) должна совпадать, с точностью до порядка, с парой чисел (r, s). При этом, если $p=r$, $q=s$, то обе части равны $+1$, а если $p=s$, $q=r$, то они равны -1. Следовательно, обе части совпадают при всех возможных значениях значков, и формула (Д.11) доказана.

Чтобы найти выражения для $R_{il,\,mk}$ через R_{ik}, введем контравариантный симметричный тензор второго ранга A^{pq} по формулам

$$A^{pq}E_{pil}E_{qmk}=R_{il,\,mk} \tag{Д.12}$$

и затем установим связь между A^{pq} и R^{pq}. Формулы (Д.12) могут быть написаны в виде равенств:

$$\left.\begin{aligned} &aA^{11}=R_{23,\,23}; \quad aA^{22}=R_{31,\,31}; \quad aA^{33}=R_{12,\,12},\\ &aA^{23}=R_{31,\,12}; \quad aA^{31}=R_{12,\,23}; \quad aA^{12}=R_{23,\,31},\end{aligned}\right\} \tag{Д.13}$$

причем

$$A^{pq}=A^{qp}. \tag{Д.14}$$

Эти равенства непосредственно выражают A^{pq} через $R_{il,\,mk}$.

Подставляя (Д.12) в (Д.01) и пользуясь (Д.09) и (Д.11), получаем:

$$R_{ik}=A^{pq}(a_{pk}a_{iq}-a_{pq}a_{ik}), \tag{Д.15}$$

и если мы положим

$$A=a_{pq}A^{pq}, \tag{Д.16}$$

то будет

$$R_{ik}=A_{ik}-a_{ik}A, \tag{Д.17}$$

откуда

$$R=a^{ik}R_{ik}=-2A, \tag{Д.18}$$

а следовательно

$$A_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} a_{ik} R. \tag{Д.19}$$

Таким образом, A_{ik} есть просто трехмерный консервативный тензор.

Подставляя соответствующий контравариантный тензор в (Д.12), получим искомое выражение тензора четвертого ранга через тензор второго ранга:

$$R_{il,\, mk} = \left(R^{pq} - \frac{1}{2}\, a^{pq} R\right) E_{pil} E_{qmk}. \tag{Д.20}$$

Из полученных формул можно вывести следующее важное следствие. Мы знаем (§ 42), что необходимым и достаточным условием приводимости заданной квадратичной формы ds^2 к форме с постоянными коэффициентами является равенство нулю тензора кривизны четвертого ранга. Этот результат относится, очевидно, и к чисто пространственной трехмерной квадратичной форме

$$dl^2 = a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{Д.21}$$

для приводимости которой к евклидову виду

$$dl^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 \tag{Д.22}$$

необходимым и достаточным условием является равенство

$$R_{il,\, mk} = 0, \tag{Д.23}$$

где в левой части стоит трехмерный тензор. Но, согласно (Д.20), для трехмерного пространства тензор кривизны четвертого ранга выражается через тензор кривизны второго ранга. Поэтому необходимым и достаточным условием евклидовости трехмерного пространства является равенство нулю тензора кривизны второго ранга.