Добавление Г

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРОНТА ВОЛНЫ

Если

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{Г.01}$$

есть уравнение движущейся поверхности фронта волны, то функция ω удовлетворяет, как мы знаем, уравнению в частных производных

$$g^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta = 0, \tag{Г.02}$$

где мы положили для краткости

$$\omega_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}. \tag{Г.03}$$

Рассмотрим следующую задачу: определить вид волновой поверхности в момент времени $x_0 > 0$, когда задан ее вид в начальный момент времени. Подобную задачу мы решали в § 4 для случая евклидовой метрики и галилеевых координат; мы рассмотрим ее теперь для общего случая.

Вид волновой поверхности в начальный момент времени может быть задан уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(u, v), \\ x_2 &= f_2(u, v), \\ x_3 &= f_3(u, v) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad x_0 = 0. \tag{Г.04}$$

Эти уравнения могут быть написаны в более симметричном виде:

$$x_\alpha = f_\alpha(u, v) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{Г.05}$$

где

$$f_0 \equiv 0. \tag{Г.06}$$

Вместо начальных данных, относящихся к моменту времени $x_0 = 0$, можно рассматривать данные Коши, относящиеся к некоторой гиперповерхности; тогда функция f_0 уже не будет тождественно равняться нулю.

Подставляя выражения (Г.05) для координат в уравнение (Г.01), мы получим тождество относительно u, v. Дифференцируя это тождество по u и по v, получаем два соотношения:

$$\omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial u} = 0; \qquad \omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = 0. \tag{Г.07}$$

Присоединив к ним уравнение фронта волны (Г.02), мы можем определить из этих трех однородных уравнений начальные значения четырех величин ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 с точностью до общего множителя. Обозначая эти начальные значения ноликом сверху, мы будем иметь

$$\omega_\alpha^0 = \lambda\varphi_\alpha(u,\ v); \qquad \lambda = \lambda(u,\ v), \tag{Г.08}$$

где φ_α — известные функции, а λ — произвольная функция от u, v. Следует заметить, что отношения величин ω_α^0 получаются не вполне однозначно: для них возможны два значения, вследствие того, что уравнение фронта волны (Г.02) квадратично относительно ω_α. Для однозначного определения этих отношений необходимо еще указать, какое из двух возможных направлений распространения волны имеет место.

Чтобы показать, что левые части уравнений (Г.05) представляют начальные значения координат, мы снабдим их ноликом сверху и перепишем в виде

$$x_\alpha^0 = f_\alpha(u,\ v). \tag{Г.09}$$

Возьмем точку на начальной волновой поверхности (всякой такой точке соответствует определенная пара значений u, v) и рассмотрим луч, проходящий через эту точку. Как мы видели в § 38, дифференциальные уравнения луча представляют уравнения Гамильтона, соответствующие уравнению Гамильтона — Якоби (Г.02). Таким образом, согласно (38.39), уравнения имеют вид:

$$\frac{dx_\alpha}{dp} = g^{\alpha\beta}\omega_\beta; \qquad \frac{d\omega_\alpha}{dp} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\omega_\mu\omega_\nu. \tag{Г.10}$$

В § 38 было показано, что эти уравнения равносильны уравнениям геодезической линии нулевой длины.

Для луча, проходящего через точку $(u,\ v)$, начальные значения переменных x_α и ω_α равны соответственно (Г.09) и (Г.08). Интегрируя уравнения (Г.10) с начальными значениями x_α^0 и ω_α^0, получим:

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(p;\ x_0^0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0;\ \omega_0^0,\ \omega_1^0,\ \omega_2^0,\ \omega_3^0), \\ \omega_\alpha &= \omega_\alpha(p;\ x_0^0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0;\ \omega_0^0,\ \omega_1^0,\ \omega_2^0,\ \omega_3^0). \end{aligned}\right\} \tag{Г.11}$$

Подставляя сюда начальные значения (Г.09) и (Г.08), получим выражения вида

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= F_\alpha(\lambda p,\ u,\ v), \\ \omega_\alpha &= \lambda\Phi_\alpha(\lambda p,\ u,\ v). \end{aligned}\right\} \tag{Г.12}$$

Так как уравнения (Г.10) не меняются при подстановке:

$$\omega_\alpha = \lambda\omega'_\alpha; \qquad p' = \lambda p, \tag{Г.13}$$

где λ — постоянно вдоль луча, то функции F_α и Φ_α зависят не от λ и p в отдельности, а только от произведения λp.

Уравнения

$$x_\alpha = F_\alpha(p', u, v) \tag{Г.14}$$

представляют, в параметрической форме, уравнения движущейся волновой поверхности. Исключив отсюда переменные p', u, v, можно получить соотношение между четырьмя координатами (x_0, x_1, x_2, x_3), которое и представляет уравнение волновой поверхности в форме (Г.01).

Доказательство приведенных здесь формул и соотношений можно найти в курсах дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (см., например, [8]).

В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{c^2}\omega_0^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = 0 \tag{Г.15}$$

при начальном виде волновой поверхности

$$z = f(x, y) \qquad \text{при} \qquad t = 0. \tag{Г.16}$$

Здесь прямоугольные координаты x, y играют роль параметров u, v. Уравнения (Г.07) напишутся:

$$\omega_1 + \omega_3 f_x = 0; \qquad \omega_2 + \omega_3 f_y = 0, \tag{Г.17}$$

где f_x и f_y — частные производные по x и y. Из (Г.15) и (Г.17) получаем одно из возможных решений:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= \lambda c, \\ \omega_1 &= -\frac{\lambda f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\ \omega_2 &= -\frac{\lambda f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\ \omega_3 &= \frac{\lambda}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{Г.18}$$

Другое решение получится из (Г.18) изменением знака квадратного корня. В формулах (Г.17) и (Г.18), строго говоря, мы должны были бы писать ω_α^0 вместо ω_α, но мы опускаем нолик сверху вследствие того, что в данном примере величины ω_α вообще постоянны.

Решая уравнения

$$\frac{dx_0}{dp}=\frac{1}{c^2}\omega_0; \qquad \frac{dx_i}{dp}=-\omega_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{Г.19}$$

и полагая, что при $t=0$ будет и $p=0$, получим

$$x_0=t=\frac{\omega_0}{c^2}p; \qquad x_i=x_i^0-\omega_i p \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{Г.20}$$

Подставляя сюда величины ω_α из (Г.18) и выражая параметр p через t, будем иметь для первого решения:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x+\frac{ctf_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ x_2&=y+\frac{ctf_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ x_3&=f(x,\ y)-\frac{ct}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{Г.21}$$

Для второго решения (с противоположным направлением распространения) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x-\frac{ctf_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ x_2&=y-\frac{ctf_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ x_3&=f(x,\ y)+\frac{ct}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{Г.22}$$

В частности, если мы возьмем в качестве начальной волновой поверхности поверхность шара радиуса a и положим

$$f(x,\ y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \tag{Г.23}$$

мы будем иметь из (Г.22):

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x\left(1+\frac{ct}{a}\right),\\ x_2&=y\left(1+\frac{ct}{a}\right),\\ x_3&=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\left(1+\frac{ct}{a}\right)\end{aligned}\right\} \tag{Г.24}$$

и после исключения x и y:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(a+ct)^2, \tag{Г.25}$$

т. е. поверхность шара радиуса $R=a+ct$, как и следовало ожидать.