Добавление B

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА

Обобщенное волновое уравнение (уравнение Даламбера) имеет вид:

$$\Box\psi = 0, \tag{B.01}$$

где $\Box\psi$ есть выражение

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}\right), \tag{B.02}$$

в котором величины $g^{\alpha\beta}$ и g имеют обычные значения.

Задача Коши для уравнения (B.01) состоит в определении функции ψ по заданным на некоторой гиперповерхности

$$\omega(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = \text{const} \tag{B.03}$$

значениям ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial x_0}$. Мы предполагаем, что уравнение гиперповерхности (B.03) может быть решено относительно x_0 и что поэтому

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_0} \neq 0. \tag{B.04}$$

Нас интересует возможность решения задачи Коши в некоторой области, достаточно близкой к гиперповерхности (B.03). Чтобы вычислить значения функции ψ в этой области, нужно иметь возможность вычислять производные от ψ в любой точке гиперповерхности. Легко видеть, что первые производные вычисляются непосредственно из начальных данных. Для вычисления же вторых производных необходимо пользоваться волновым уравнением. При этом возможность определения вторых производных будет зависеть от вида гиперповерхности, к которой относятся начальные данные. Если гиперповерхность такова, что отнесенные к ней начальные данные не определяют значения вторых производных, то она называется характеристической. Характеристическая гиперповерхность обладает тем свойством, что на ней возможны разрывы вторых производных. Поэтому движущаяся поверхность фронта волны и должна быть характеристической.

Рассмотрим сперва простейший случай, когда начальные данные относятся к гиперповерхности $x_0 = \text{const}$, т. е. к начальному моменту времени. Из заданных значений ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial x_0}$ непосредственным дифференцированием получаются все первые производные, а также вторые производные вида

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0\,\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_k} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{B.05}$$

(точнее, значения этих величин при заданном x_0). Что касается второй производной по x_0, то она должна вычисляться из волнового уравнения. В развернутом виде волновое уравнение имеет вид

$$g^{00}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} + \ldots = 0, \tag{B.06}$$

где многоточием обозначены члены, содержащие остальные вторые производные (В.05), а также первые производные, которые известны. Так как по свойству фундаментального тензора величина g^{00} никогда не обращается в нуль (она всегда положительна), то уравнение (В.06) может быть всегда решено относительно остающейся второй производной $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2}$. Это значит, что если переменная x_0 имеет характер времени, то гиперповерхность $x_0 = \text{const}$ не является характеристической.

Рассмотрим теперь общий случай гиперповерхности (В.03). Введем новые переменные

$$x_0' = \omega(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3); \quad x_1' = x_1; \quad x_2' = x_2; \quad x_3' = x_3. \tag{B.07}$$

Обозначая через ψ' величину ψ, рассматриваемую как функция от переменных x_0', x_1', x_2', x_3', будем иметь:

$$\psi = \psi'; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_0} = \frac{\partial\psi'}{\partial x_0'}\frac{\partial\omega}{\partial x_0}, \tag{B.08}$$

и вследствие (В.04) задание ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial x_0}$ при $\omega = \text{const}$ равносильно заданию ψ' и $\frac{\partial\psi'}{\partial x_0'}$ при $x_0' = \text{const}$. Из этих последних величин можно вычислить, подобно предыдущему, все первые производные, а также вторые производные вида

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_0'\,\partial x_i'}; \quad \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_i'\,\partial x_k'} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{B.09}$$

тогда как вторая производная по x_0' определяется из волнового уравнения. Преобразованный к новым переменным, оператор Даламбера будет иметь вид:

$$\Box \psi = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\sqrt{-g'} g'^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x'_\beta}\right), \qquad (\text{В}.10)$$

где $g'^{\alpha\beta}$ получается из $g^{\sigma\beta}$ по общему правилу преобразования тензора, и в частности

$$g'^{00} = g^{\mu\nu} \frac{\partial x'_0}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_0}{\partial x_\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}. \qquad (\text{В}.11)$$

Необходимо только помнить, что, поскольку новая переменная x'_0 не обязательно имеет характер времени, неравенство $g'^{00} > 0$ может не выполняться.

Преобразованное волновое уравнение напишется:

$$\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}\right) \cdot \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_0'^2} + \ldots = 0, \qquad (\text{В}.12)$$

где невыписанные члены уже не содержат второй производной по x'_0, а содержат только вторые производные вида (В.09), а также первые производные. Значения всех невыписанных членов на гиперповерхности $\omega = \text{const}$ можно считать известными из относящихся к ней начальных данных.

Вторая производная по x'_0 остается неопределенной в том и только в том случае, когда коэффициент при ней в волновом уравнении (В.12) обращается в нуль, т. е. когда функция ω удовлетворяет уравнению

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 0. \qquad (\text{В}.13)$$

Это и есть уравнение характеристик для волнового уравнения (В.01).

Характеристики обобщенного волнового уравнения совпадают с характеристиками общековариантных уравнений Максвелла, рассмотренных в § 46. Коротко (хотя не вполне строго) этот результат может быть обоснован следующими соображениями. При условии $\nabla_\nu A^\nu = 0$ из уравнений Максвелла вытекают для потенциалов A_ν уравнения, в которых высшие (вторые) производные группируются в виде оператора Даламбера. Отсюда можно заключить, что и характеристики общековариантных уравнений Максвелла имеют вид (В.13). Нестрогость этого вывода заключается в переходе от характеристик для потенциалов к характеристикам для поля. Не представляет труда дать и строгий вывод, оперируя непосредственно с составляющими поля, подобно тому как это делалось в § 3 для декартовых координат в евклидовом случае.