§ 3. Закон распространения фронта электромагнитной волны

Законы распространения света в свободном пространстве хорошо изучены. Они выражаются известными уравнениями Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.01}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного поля. Нас интересует, однако, не общий случай распространения света, а лишь распространение сигнала, идущего с предельной скоростью, т. е. распространение фронта волны. Впереди фронта волны все составляющие поля равны нулю; позади фронта некоторые из них отличны от нуля. Таким образом, на фронте волны некоторые из составляющих поля терпят разрыв.

С другой стороны, задание поля на некоторой поверхности (движущейся в пространстве), вообще говоря, определяет, в силу уравнений Максвелла, и значения производных от поля на этой поверхности. Тем самым определяется и значение поля на бесконечно близкой поверхности, а скачки поля становятся невозможными. Это будет не так только в том случае, когда данная поверхность (ее форма и движение) подчинена особым условиям, при выполнении которых значения производных от поля не определяются значениями поля. Поверхность называется тогда характеристической поверхностью, или проще, характеристикой. Таким образом, скачки поля возможны только на характеристике. Но так как на фронте волны поле заведомо терпит скачок, то ясно, что фронт волны должен быть характеристикой.

Найдем уравнение характеристик для системы уравнений Максвелла.

Пусть значения поля заданы для тех точек и для тех моментов времени, координаты которых связаны уравнением

$$t = \frac{1}{c} f(x, y, z). \tag{3.02}$$

В частности, при $f \equiv 0$ это будут *начальные данные*. Уравнение (3.02) можно рассматривать как уравнение некоторой гиперповерхности в четырехмерном многообразии пространства-времени. То же самое уравнение можно (по крайней мере, если $(\operatorname{grad} f)^2 > 1$) рассматривать как уравнение обыкновенной поверхности, движущейся в пространстве (см. также § 35). Пусть на гиперповерхности (3.02) заданы значения некоторой функции

$$u\left(x, y, z, \frac{f}{c}\right) = u_0(x, y, z). \tag{3.03}$$

Тем самым на этой гиперповерхности будут заданы и следующие комбинации производных по координатам и времени:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{3.04}$$

Мы обозначили здесь для краткости x, y, z через x_1, x_2, x_3. Если, кроме того, задана производная $\frac{\partial u}{\partial t}$, то будут известны и значения на поверхности всех первых производных от u по координатам и времени.

Возьмем теперь в качестве функции u одну из составляющих электромагнитного поля, например E_x, и обозначим значение этой составляющей на гиперповерхности через $E_x^0 = E_x^0(x,\ y,\ z)$. Аналогичные обозначения (значок 0 сверху) введем для других составляющих. Если на гиперповерхности задано поле, то все величины $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ можно считать известными функциями от координат x, y, z. Подобно (3.04), мы будем иметь, например,

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial E_x^0}{\partial z} \quad \text{и т. д.,} \tag{3.05}$$

откуда

$$\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \operatorname{Div}\mathbf{E}^0, \tag{3.06}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\operatorname{grad} f\times\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right] = \operatorname{Curl}\mathbf{E}^0, \tag{3.07}$$

а также

$$\operatorname{div}\mathbf{H} + \frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = \operatorname{Div}\mathbf{H}^0, \tag{3.08}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} + \frac{1}{c}\left[\operatorname{grad} f\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] = \operatorname{Curl}\mathbf{H}^0. \tag{3.09}$$

В последних формулах мы обозначили операции div и curl, примененные к $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$, большими буквами (Div, Curl).

Заданные шесть функций $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ не являются независимыми, а должны удовлетворять двум соотношениям, которые мы сейчас выведем.

Умножая уравнения (3.07) и (3.09) скалярно на $\operatorname{grad} f$ и пользуясь уравнениями Максвелла (3.01), получим

$$(\operatorname{grad} f\cdot\operatorname{Curl}\mathbf{E}^0) = -\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right), \tag{3.10}$$

$$(\operatorname{grad} f\cdot\operatorname{Curl}\mathbf{H}^0) = \frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \tag{3.11}$$

С другой стороны, в левых частях тождеств (3.08) и (3.06) первые члены в силу уравнений Максвелла равны нулю, а вторые члены совпадают с правыми частями (3.10) и (3.11). Поэтому мы будем иметь

$$\operatorname{Div} \mathbf{H}^0 + (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Curl} \mathbf{E}^0) = 0, \tag{3.12}$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{E}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Curl} \mathbf{H}^0) = 0. \tag{3.13}$$

Таковы условия, налагаемые на заданные функции $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. В случае $f = \mathrm{const}$ мы имеем обычные начальные данные, и тогда эти условия сводятся к очевидному требованию, чтобы и в начальный момент было $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.

Пользуясь уравнениями Максвелла, мы можем написать уравнения (3.07) и (3.09) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left[\operatorname{grad} f \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] = c \operatorname{Curl} \mathbf{H}^0, \tag{3.14}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \left[\operatorname{grad} f \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right] = c \operatorname{Curl} \mathbf{E}^0. \tag{3.15}$$

Умножая эти уравнения векториально на $\operatorname{grad} f$ и пользуясь выведенными ранее соотношениями, мы можем преобразовать их к виду

$$\left(1 - (\operatorname{grad} f)^2\right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dot{\mathbf{E}}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \dot{\mathbf{E}}^0) \operatorname{grad} f - [\operatorname{grad} f \times \dot{\mathbf{H}}^0]; \tag{3.16}$$

$$\left(1 - (\operatorname{grad} f)^2\right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \dot{\mathbf{H}}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \dot{\mathbf{H}}^0) \operatorname{grad} f + [\operatorname{grad} f \times \dot{\mathbf{E}}^0]. \tag{3.17}$$

Здесь мы положили для краткости

$$\dot{\mathbf{E}}^0 = c \operatorname{Curl} \mathbf{H}^0; \quad \dot{\mathbf{H}}^0 = -c \operatorname{Curl} \mathbf{E}^0. \tag{3.18}$$

В правых частях уравнений (3.16) и (3.17) стоят известные функции. Эти уравнения могут быть решены относительно производных по времени, если коэффициент при них, т. е. величина $1 - (\operatorname{grad} f)^2$, не равен нулю. Но в таком случае формулы, аналогичные (3.05), дают и для всех остальных первых производных от поля конечные значения, а следовательно, самое поле будет на поверхности (3.02) непрерывным. Чтобы там был возможен разрыв, необходимо обращение в нуль коэффициента при производных по времени. Это приводит к условию

$$(\operatorname{grad} f)^2 = 1, \tag{3.19}$$

при выполнении которого данная поверхность будет характеристической. Если мы будем писать уравнение поверхности, не решая его относительно t, а в виде

$$\omega(x, y, z, t) = 0, \tag{3.20}$$

то уравнение характеристик (3.19) примет вид

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - (\operatorname{grad} \omega)^2 = 0. \tag{3.21}$$

Таким образом, распространение фронта электромагнитной волны подчиняется уравнению (3.21).

В частности, уравнению (3.19) или (3.21) удовлетворяют функции

$$t = \frac{1}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1); \tag{3.22}$$

$$t = t_0 + \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{3.23}$$

Первая — дает плоскую, а вторая — сферическую волну.

§ 4. Уравнения для лучей

Уравнение распространения фронта волны может быт написано в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + c\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 0. \tag{4.01}$$

(Для определенности мы выбрали перед корнем знак плюс.) Оно имеет тот же вид, как уравнение Гамильтона — Якоби в механике, причем ω играет роль функции действия S, а производные ω_x, ω_y, ω_z — роль „моментов“ p_x, p_y, p_z. Гамильтоновой функции здесь соответствует выражение

$$H = c\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \tag{4.02}$$

Траекториям будут здесь соответствовать лучи. Уравнения для лучей будут аналогичны уравнениям Гамильтона. Они напишутся

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\omega_x} = c\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}} \quad \text{и т. д.}; \tag{4.03}$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \text{и т. д.} \tag{4.04}$$

Уравнения (4.04) показывают, что величины ω_x, ω_y, ω_z вдоль луча постоянны (они могут, конечно, меняться от луча к лучу). Отсюда следует, что лучи будут прямыми

$$x - x_0 = c\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}(t - t_0) \quad \text{и т. д.} \tag{4.05}$$

При изменении знака ω (а значит и ω_x, ω_y, ω_z) направление луча меняется на противоположное; знак ω должен быть выбран в соответствии с заданным направлением (ориентацией) луча.

Всякая волновая поверхность может рассматриваться, как образованная из точек, движущихся со скоростью света по лучам (4.05).

Это дает возможность построить волновую поверхность для момента времени t, когда известен ее вид для момента времени t_0.