Таким образом, распространение фронта электромагнитной волны подчиняется уравнению (3.21).

В частности, уравнению (3.19) или (3.21) удовлетворяют функции

$$t = \frac{1}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1); \tag{3.22}$$

$$t = t_0 + \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{3.23}$$

Первая — дает плоскую, а вторая — сферическую волну.

§ 4. Уравнения для лучей

Уравнение распространения фронта волны может быт написано в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + c\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 0. \tag{4.01}$$

(Для определенности мы выбрали перед корнем знак плюс.) Оно имеет тот же вид, как уравнение Гамильтона — Якоби в механике, причем ω играет роль функции действия S, а производные ω_x, ω_y, ω_z — роль „моментов“ p_x, p_y, p_z. Гамильтоновой функции здесь соответствует выражение

$$H = c\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \tag{4.02}$$

Траекториям будут здесь соответствовать лучи. Уравнения для лучей будут аналогичны уравнениям Гамильтона. Они напишутся

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \omega_x} = c\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}} \quad \text{и т. д.}; \tag{4.03}$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \text{и т. д.} \tag{4.04}$$

Уравнения (4.04) показывают, что величины ω_x, ω_y, ω_z вдоль луча постоянны (они могут, конечно, меняться от луча к лучу). Отсюда следует, что лучи будут прямыми

$$x - x_0 = c\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}(t - t_0) \quad \text{и т. д.} \tag{4.05}$$

При изменении знака ω (а значит и ω_x, ω_y, ω_z) направление луча меняется на противоположное; знак ω должен быть выбран в соответствии с заданным направлением (ориентацией) луча.

Всякая волновая поверхность может рассматриваться, как образованная из точек, движущихся со скоростью света по лучам (4.05).

Это дает возможность построить волновую поверхность для момента времени t, когда известен ее вид для момента времени t_0.

Пусть уравнение волновой поверхности для момента времени t_0 имеет вид

$$\omega^0(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0, \tag{4.06}$$

где x_0, y_0, z_0 — текущие координаты на поверхности. Зная уравнение поверхности, мы можем вычислить величины

$$\alpha(x_0,\ y_0,\ z_0) = \left(\frac{\omega_x^0}{\sqrt{\omega_x^{0^2} + \omega_y^{0^2} + \omega_z^{0^2}}}\right)_0 \quad \text{и т. д.,} \tag{4.07}$$

причем знак правых частей определяется из заданного направления распространения волны. Уравнение луча, проходящего через точку x_0, y_0, z_0 начальной волновой поверхности, напишется

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= c\alpha(t - t_0), \\ y - y_0 &= c\beta(t - t_0), \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1). \\ z - z_0 &= c\gamma(t - t_0) \end{aligned}\right\} \tag{4.08}$$

Величины x, y, z дадут положение точки, в которую перейдет точка x_0, y_0, z_0 к моменту времени t. Придавая величинам x_0, y_0, z_0 всевозможные значения, связанные соотношением $\omega^0 = 0$, мы получим из (4.08) все точки, лежащие на волновой поверхности в момент времени t.

Если мы решим уравнения (4.08) относительно x_0, y_0, z_0 и подставим функции

$$x_0 = x_0(x,\ y,\ z,\ t - t_0) \quad \text{и т. д.} \tag{4.09}$$

в уравнение волновой поверхности $\omega^0 = 0$, мы получим соотношение

$$\omega(x,\ y,\ z,\ t - t_0) = 0, \tag{4.10}$$

т. е. явную форму уравнения волновой поверхности для момента времени t. Очевидно, что при $t = t_0$ будет $x_0 = x$, $y_0 = y$, $z_0 = z$, и уравнение (4.10) приведется к (4.06), т. е. к заданному уравнению начальной волновой поверхности.

Из уравнений луча (4.05) получается соотношение

$$c^2(t - t_0)^2 - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] = 0, \tag{4.11}$$

связывающее координаты начальной и конечной точек на каждом луче. Уравнение (4.11) представляет уравнение шара с центром в точке x_0, y_0, z_0 и с радиусом $R = c(t - t_0)$, растущим пропорционально времени. Оно, так же как и исходное уравнение (3.21), выражает постоянство скорости распространения света.

Для бесконечно близких точек соотношение (4.11) принимает вид

$$c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0. \tag{4.12}$$

В такой форме оно вытекает непосредственно из уравнений Гамильтона (4.03).

Более подробное изложение математической теории характеристик можно найти, например, в курсе акад. В. И. Смирнова (т. IV).