образование Галилея было правильным (а принцип относительности в общей форме — неправильным), то существовала бы только одна инерциальная система в смысле нашего определения, и по измененному виду уравнения распространения фронта волны было бы возможно определить скорость движения (даже равномерного и прямолинейного) всякой другой системы отсчета относительно этой единственной инерциальной системы („неподвижного эфира"). Отрицательный результат многочисленных точнейших опытов, поставленных с целью обнаружения такого относительного движения, не оставляет сомнений в том, что форма закона распространения фронта волны одна и та же во всех неускоренных системах отсчета и что, следовательно, принцип относительности во всяком случае применим и к электромагнитным явлениям.

Отсюда следует, что преобразование Галилея в общем случае неправильно и должно быть заменено другим.

Формулированные в предыдущих параграфах общие положения дают всё необходимое для вывода того преобразования координат и времени, которое должно заменить собой преобразование Галилея.

Наша задача может быть поставлена следующим образом.

Пусть дана система отсчета, инерциальная в смысле нашего определения (т. е. в механическом и в электромагнитном смысле, см. § 5). Координаты и время в ней обозначим через x, y, z, t. Пусть дана другая система отсчета (с координатами и временем x', y', z', t'), которая движется относительно данной инерциальной системы прямолинейно и равномерно. Требуется найти связь между величинами (x', y', z', t') и (x, y, z, t).

Первый шаг в решении этой задачи осуществляется на основании принципа относительности. Согласно этому принципу, *новая система отсчета сама является инерциальной*. Поэтому задача сводится к нахождению связи между координатами и временем в двух инерциальных системах. Но эта последняя задача уже чисто математическая: для решения ее не требуется никаких дальнейших физических предположений.

Мы разобьем решение этой математической задачи на два этапа: сперва докажем линейность искомого преобразования, а затем найдем его коэффициенты.

§ 8. Доказательство линейности преобразования, связывающего две инерциальные системы

Из первого условия, характеризующего инерциальные системы (условия инерциальности в механическом смысле), вытекает, что при переходе от одной инерциальной системы к другой свойство прямолинейности и равномерности движения должно сохраняться. Это значит, что уравнения

$$x = x_0 + v_x(t - t_0); \quad y = y_0 + v_y(t - t_0); \quad z = z_0 + v_z(t - t_0) \quad (8.01)$$

должны иметь следствием уравнения

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'_0 + v'_x(t' - t'_0); \quad y' = y'_0 + v'_y(t' - t'_0); \\ z' &= z'_0 + v'_z(t' - t'_0). \end{aligned}\right\} \tag{8.02}$$

Второе условие для инерциальных систем требует, чтобы из уравнения

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \tag{8.03}$$

имеющего место в нештрихованной системе, вытекало уравнение

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t'}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z'}\right)^2\right] = 0 \tag{8.04}$$

для штрихованной системы. Это второе условие мы можем, однако, написать в виде, аналогичном первому условию. В самом деле, из уравнения вида (8.03) вытекают уравнения (4.08) для лучей, т. е. прямолинейное распространение света с постоянной скоростью. Это должно иметь место как в нештрихованной, так и в штрихованной системе отсчета. Поэтому если мы для точки пересечения луча света с волновой поверхностью имеем

$$x = x_0 + v_x(t - t_0); \quad y = y_0 + v_y(t - t_0); \quad z = z_0 + v_z(t - t_0), \tag{8.05}$$

где

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2,$$

то должно быть и

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'_0 + v'_x(t' - t'_0); \quad y' = y'_0 + v'_y(t' - t'_0); \\ z' &= z'_0 + v'_z(t' - t'_0), \end{aligned}\right\} \tag{8.06}$$

где

$$v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = c^2.$$

Таким образом, второе условие сводится к добавочному требованию чтобы в уравнениях для прямолинейного и равномерного движения из $v^2 = c^2$ вытекало $v'^2 = c^2$.

Наша задача состоит в том, чтобы найти самый общий вид функций

$$\left.\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z, t), \\ y' &= f_2(x, y, z, t), \\ z' &= f_3(x, y, z, t), \\ t' &= f_4(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \tag{8.07}$$

таких, чтобы из написанных выше уравнений для нештрихованных величин вытекали аналогичные уравнения для штрихованных величин *).

*) Задача эта рассматривалась также Умовым [4] и Вейлем [7].

Прежде чем перейти к решению этой задачи мы введем более симметричные обозначения.

Мы положим

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3 \tag{8.08}$$

и введем вместо времени пропорциональную ему величину

$$x_0 = ct, \tag{8.09}$$

физический смысл которой есть путь, проходимый светом за данное время. (Таким образом, в новых обозначениях x_0 уже не есть начальное значение координаты x). Искомое преобразование мы напишем в виде

$$x'_i = f_i(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{8.10}$$

Начальные значения величин x_0, x_1, x_2, x_3 мы будем обозначать через ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 (и аналогично для штрихованных величин). Введем произвольную положительную постоянную γ_0 и параметр $s = \frac{c}{\gamma_0}(t - t_0)$ и положим

$$\gamma_i = \gamma_0 \frac{v_i}{c} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{8.11}$$

тогда уравнения прямолинейного равномерного движения напишутся

$$x_i = \xi_i + \gamma_i s, \tag{8.12}$$

и наше первое условие будет заключаться в том, чтобы из уравнений (8.12) вытекали уравнения

$$x'_i = \xi'_i + \gamma'_i s' \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{8.13}$$

где ξ'_i и γ'_i — новые постоянные и s' — новый параметр (они могут быть выражены через старые после того, как будет найден вид функций f_i).

Второе условие заключается в требовании, чтобы из соотношения

$$\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0 \tag{8.14}$$

вытекало соотношение

$$\gamma'^2_0 - (\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2 + \gamma'^2_3) = 0. \tag{8.15}$$

Само собою разумеется, что уравнения преобразования (8.10) должны быть разрешимы относительно старых переменных x_0, x_1, x_2, x_3. Для этого нужно, чтобы якобиан преобразования не обращался в нуль:

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\| \neq 0. \tag{8.16}$$

Переходим к выводу уравнений для функций f_i.

Разумея под x_i линейные функции (8.12) от параметра s, мы будем иметь

$$\frac{df_i}{ds} = \sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \tag{8.17}$$

Составим производную

$$\frac{dx_i'}{dx_0'} = \frac{\gamma_i'}{\gamma_0'}, \tag{8.18}$$

которая по условию должна быть постоянной. Мы имеем

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}} = \frac{\gamma_i'}{\gamma_0'} = \text{const}. \tag{8.19}$$

Приравнивая нулю логарифмическую производную от этого выражения по s, получим

$$\frac{\sum\limits_{k,\,l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \,\partial x_l}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}} = \frac{\sum\limits_{k,\,l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_k \,\partial x_l}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}} \tag{8.20}$$

В этом равенстве аргументами в частных производных от f_0 и f_i являются величины (8.12), которые сами зависят от γ_i. Поскольку, однако, величины ξ_i в (8.12) являются произвольными, мы можем рассматривать γ_i и x_i как независимые переменные. [К тому же заключению мы придем, если положим в (8.20) $s = 0$ и затем будем писать x_i вместо ξ_i]. Таким образом, уравнения (8.20) должны выполняться тождественно относительно γ_i и x_i.

Как функции от γ_i, выражения (8.20) представляют рациональные дроби. Однако ни при каких конечных значениях γ_k все четыре знаменателя в них [т. е. четыре выражения (8.17) для $i = 0, 1, 2, 3$] не могут обратиться в нуль одновременно, так как определитель (8.16) всегда отличен от нуля. Поэтому каждая из дробей всегда остается конечной, даже если знаменатель в ней обращается в нуль. Но это может быть только в том случае, когда числитель дроби делится на знаменатель, так что фактически выражения (8.20) представляют не дроби, а целую функцию от γ_k, которую мы будем писать в виде

$$2 \sum_{l=0}^{3} \gamma_l \psi_l. \tag{8.21}$$

Таким образом, мы имеем

$$\sum_{k,\,l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \,\partial x_l} = 2 \sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \sum_{l=0}^{3} \gamma_l \psi_l. \tag{8.22}$$

Так как это есть тождество относительно γ_i, то мы будем иметь

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \,\partial x_l} = \psi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \psi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \tag{8.23}$$

Мы приходим к следующему выводу. Для того чтобы прямолинейное и равномерное движение переходило в прямолинейное и равномерное, необходимо, чтобы функции преобразования f_i удовлетворяли системе уравнений в частных производных (8.23), где ψ_k — некоторые функции от x_0, x_1, x_2, x_3.

Найдем теперь условие, которому должны удовлетворять функции f_i для того, чтобы из соотношения (8.14) вытекало (8.15). Вследствие (8.19) соотношение (8.15) равносильно следующему:

$$\left(\sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)^2 = 0. \tag{8.24}$$

Это уравнение должно быть следствием уравнения

$$\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0. \tag{8.14}$$

Так как левые части (8.24) и (8.14) — квадратичные функции от γ_i, то они должны быть друг другу пропорциональны. Чтобы записать вытекающие отсюда формулы в более удобном виде, введем четыре величины:

$$e_0 = 1;\; e_1 = e_2 = e_3 = -1, \tag{8.25}$$

и напишем (8.24) и (8.14) в виде

$$\sum_{i,\,k,\,l=0}^{3} e_i \gamma_k \gamma_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = 0, \tag{8.26}$$

$$\sum_{k=1}^{3} e_k \gamma_k^2 = 0. \tag{8.27}$$

Полагая левую часть (8.26) пропорциональной левой части (8.27), получим

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \lambda e_k \delta_{kl}, \tag{8.28}$$

где λ — некоторая функция от x_0, x_1, x_2, x_3, а символ δ_{kl} имеет обычное значение:

$$\delta_{kl} = 0 \quad \text{при } k \neq l;\; \delta_{kk} = 1. \tag{8.29}$$

Мы выведем из условия (8.28) другое, по форме аналогичное условию (8.23).

Дифференцируя (8.28) по x_m и полагая

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_m} = 2\lambda\varphi_m, \tag{8.30}$$

будем иметь

$$\sum_{i=0}^{3} e_i\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l\,\partial x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_m}\right) = 2\lambda\varphi_m e_k\delta_{kl}. \tag{8.31}$$

Чтобы получить условие, аналогичное (8.23), положим *)

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial x_m} = \sum_{r=0}^{3}\Gamma_{km}^r\frac{\partial f_i}{\partial x_r}; \quad \Gamma_{km}^r = \Gamma_{mk}^r \tag{8.32}$$

и подставим (8.32) в (8.31). Пользуясь уравнениями (8.28), мы получим, по сокращении на λ,

$$e_l\Gamma_{km}^l + e_k\Gamma_{lm}^k = 2\varphi_m e_k\delta_{kl}. \tag{8.33}$$

Чтобы найти отсюда коэффициенты Γ_{km}^l, присоединим к уравнению (8.33) два других, получаемых из него круговой перестановкой букв k, l, m:

$$e_m\Gamma_{lk}^m + e_l\Gamma_{mk}^l = 2\varphi_k e_l\delta_{lm}, \tag{8.34}$$

$$e_k\Gamma_{ml}^k + e_m\Gamma_{kl}^m = 2\varphi_l e_m\delta_{mk}. \tag{8.35}$$

Теперь возьмем сумму последних двух из этих трех уравнений и вычтем из нее первое. Пользуясь симметрией величин Γ_{km}^r относительно нижних значков, мы получим тогда

$$e_m\Gamma_{kl}^m = \varphi_k e_l\delta_{lm} + \varphi_l e_m\delta_{mk} - \varphi_m e_k\delta_{kl} \tag{8.36}$$

или

$$\Gamma_{kl}^m = \varphi_k\delta_{lm} + \varphi_l\delta_{km} - e_m\varphi_m e_k\delta_{kl}. \tag{8.37}$$

Подставляя это значение в (8.32), мы получаем окончательно

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial x_l} = \varphi_k\frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \varphi_l\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - e_k\delta_{kl}\sum_{m=0}^{3}e_m\varphi_m\frac{\partial f_i}{\partial x_m}, \tag{8.38}$$

причем, согласно (8.30),

$$\varphi_m = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}(\lg\sqrt{\lambda}). \tag{8.39}$$

*) Это всегда возможно вследствие (8.16) и вследствие того, что число коэффициентов Γ_{km}^r равно числу вторых производных от f_i.

Таково условие, вытекающее из требования, чтобы прямолинейному и равномерному движению со скоростью света соответствовало, после преобразования, такое же движение.

Но искомые функции f_i должны, кроме того, удовлетворять условию

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \psi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \psi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \tag{8.23}$$

вытекающему из аналогичного требования для движения со скоростью, не равной скорости света.

Чтобы сравнить между собой уравнения (8.23) и (8.38), удобно писать (8.38) в виде (8.32) и представить в аналогичном виде также и уравнение (8.23). Вместо (8.23) мы можем написать

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{m=0}^{3} \Lambda_{kl}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_m}, \tag{8.40}$$

где

$$\Lambda_{kl}^{m} = \psi_k \delta_{lm} + \psi_l \delta_{km}. \tag{8.41}$$

Чтобы правые части (8.38) и (8.23) были между собою равны, необходимо, чтобы для всех значков k, l, m имело место равенство

$$\Gamma_{kl}^{m} = \Lambda_{kl}^{m}, \tag{8.42}$$

откуда

$$(\varphi_k - \psi_k)\delta_{lm} + (\varphi_l - \psi_l)\delta_{km} - e_m \varphi_m e_k \delta_{kl} = 0. \tag{8.43}$$

Полагая здесь $k = m$, $l \neq m$, получим

$$\psi_l = \varphi_l \qquad (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

После этого, полагая в (8.43) $k = l$, получаем $\varphi_m = 0$. Следовательно

$$\psi_l = \varphi_l = 0 \qquad (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{8.44}$$

Таким образом, правые части уравнений (8.38) и (8.23) могут быть равны только в том случае, когда они равны нулю. При этом величина λ в (8.39) оказывается постоянной, а уравнения для f_i приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0. \tag{8.45}$$

Мы приходим к выводу, что из совокупности двух условий, характеризующих инерциальные системы, вытекает, что формулы преобразования, связывающие координаты и время в этих двух системах, должны быть линейными.

Вопрос о том, что вытекает из каждого из этих условий, взятого в отдельности [т. е. из уравнения (8.38) в отдельности и из уравнения (8.23) в отдельности], мы рассмотрим в Добавлении А.