§ 9. Определение коэффициентов линейного преобразования и масштабного множителя

В уравнение (8.28) для функций f_i входит неизвестный постоянный множитель λ. Чтобы учесть явным образом влияние его на вид преобразования, будем писать наши линейные функции f_i в виде

$$x'_i = f_i = \sqrt{\lambda}\left(a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k\right). \tag{9.01}$$

Уравнения (8.28) будут выполняться тождественно относительно λ, если коэффициенты a_{ik} удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl}, \tag{9.02}$$

из которых следует, что будет и

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ki} a_{li} = e_k \delta_{kl}. \tag{9.03}$$

Уравнения (9.01) могут быть решены относительно x_i, причем получается

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki}\left(\frac{x'_k}{\sqrt{\lambda}} - a_k\right). \tag{9.04}$$

Мы имеем также

$$dx_0'^2 - (dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2) = \lambda\,[dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)] \tag{9.05}$$

и для произвольной функции ω

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right]\right\}. \tag{9.06}$$

Очевидно, что множитель λ (точнее $\sqrt{\lambda}$) характеризует отношение масштабов в штрихованной и нештрихованной координатных системах, причем речь идет о масштабе, общем для пространственных координат и для времени, так что изменение его не влияет ни на углы между пространственными направлениями, ни на значения скорости. Мы покажем, что этот множитель нужно положить равным единице.

Рассмотрим точку, неподвижную в штрихованной системе отсчета. Тогда скорость этой точки в нештрихованной системе дает скорость движения самой штрихованной системы относительно нештрихованной.

Обозначим составляющие этой скорости (взятые в нештрихованной системе) через V_1, V_2, V_3. Таким образом,

$$V_i = \frac{dx_i}{dt} = c\frac{dx_i}{dx_0} \quad \text{для } dx'_1 = dx'_2 = dx'_3 = 0. \tag{9.07}$$

Но мы имеем из (9.04)

$$dx_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a_{0i}\, dx'_0; \qquad dx'_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a_{00}\, dx'_0 \tag{9.08}$$

и, следовательно,

$$V_i = c\frac{a_{0i}}{a_{00}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{9.09}$$

Отсюда прежде всего следует, что преобразование (9.01), дающее связь между координатами и временем в двух инерциальных системах, соответствует переходу от данной системы отсчета к другой, движущейся относительно данной прямолинейно и равномерно, как это и должно быть.

Далее из формулы (9.09) следует, что относительная скорость движения систем никак не связана с масштабным множителем λ, а значит и этот множитель не может зависеть от относительной скорости *). Но при относительной скорости, равной нулю, достаточно предположить, что в обеих системах отсчета длина (а также промежутки времени) измеряется одинаковым образом и выражается в одинаковых единицах, чтобы можно было считать $\lambda = 1$. При таком, совершенно естественном, условии λ будет равно единице и для любой инерциальной системы, независимо от ее скорости.

Таким образом, мы можем уточнить наши формулы, положив в них $\lambda = 1$. Вместо (9.05) и (9.06) мы получим тогда

$$dx_0'^2 - (dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2) = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{9.10}$$

и

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2\right] = \\ = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right], \tag{9.11}$$

а прямые и обратные формулы преобразования напишутся:

$$x'_i = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k, \tag{9.12}$$

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} (x'_k - a_k). \tag{9.13}$$

---

*) Обычно утверждается, по примеру Эйнштейна, что масштабный множитель „очевидно“ может зависеть от относительной скорости и только от нее. Лишь затем доказывается, что фактически он от нее не зависит, ибо равен единице.

Эти формулы носят название преобразования Лоренца. Они составляют формальную основу всей теории относительности.

Заметим, что исходной точкой наших рассуждений было требование, чтобы во всякой инерциальной системе отсчета уравнение распространения фронта электромагнитной волны имело вид (5.01). Отсюда вытекало, что равенство нулю правой части (9.11) должно иметь следствием равенство нулю левой части. Но в результате наложения добавочных условий (о том, чтобы прямолинейное и равномерное движение переходило в такое же движение, и о том, чтобы масштаб в обеих системах отсчета был одинаков) мы получили большее: правая часть (9.11) не только обращается в нуль одновременно с левой частью, но и тождественно равна ей.

§ 10. Преобразование Лоренца

Преобразование Лоренца представляет формулы перехода от координат и времени в одной инерциальной системе отсчета к координатам и времени в другой инерциальной системе, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно. Оно может быть характеризовано тем, что величина

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{10.01}$$

или

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{10.02}$$

остается при таком преобразовании инвариантной. Самое общее преобразование Лоренца имеет вид

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k, \tag{10.03}$$

где коэффициенты a_{ik} удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl}, \tag{10.04}$$

$$\sum_{i=0} e_i a_{ki} a_{li} = e_k \delta_{kl}. \tag{10.05}$$

Исследуем физический смысл постоянных, входящих в формулы преобразования.

Прежде всего, очевидно, что постоянные члены a_i соответствуют изменению начала отсчета для координат и времени. Если мы будем считать, что в момент времени $t = 0$ начала координат старой и новой системы отсчета совпадают, то будет

$$a_i = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{10.06}$$