Эти формулы носят название преобразования Лоренца. Они составляют формальную основу всей теории относительности.

Заметим, что исходной точкой наших рассуждений было требование, чтобы во всякой инерциальной системе отсчета уравнение распространения фронта электромагнитной волны имело вид (5.01). Отсюда вытекало, что равенство нулю правой части (9.11) должно иметь следствием равенство нулю левой части. Но в результате наложения добавочных условий (о том, чтобы прямолинейное и равномерное движение переходило в такое же движение, и о том, чтобы масштаб в обеих системах отсчета был одинаков) мы получили большее: правая часть (9.11) не только обращается в нуль одновременно с левой частью, но и тождественно равна ей.

§ 10. Преобразование Лоренца

Преобразование Лоренца представляет формулы перехода от координат и времени в одной инерциальной системе отсчета к координатам и времени в другой инерциальной системе, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно. Оно может быть характеризовано тем, что величина

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{10.01}$$

или

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{10.02}$$

остается при таком преобразовании инвариантной. Самое общее преобразование Лоренца имеет вид

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k, \tag{10.03}$$

где коэффициенты a_{ik} удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl}, \tag{10.04}$$

$$\sum_{i=0} e_i a_{ki} a_{li} = e_k \delta_{kl}. \tag{10.05}$$

Исследуем физический смысл постоянных, входящих в формулы преобразования.

Прежде всего, очевидно, что постоянные члены a_i соответствуют изменению начала отсчета для координат и времени. Если мы будем считать, что в момент времени $t = 0$ начала координат старой и новой системы отсчета совпадают, то будет

$$a_i = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{10.06}$$

В дальнейшем мы примем это условие и будем писать преобразование Лоренца в виде

$$x'_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k. \tag{10.07}$$

Физический смысл отношения коэффициентов

$$\frac{a_{0i}}{a_{00}} = \frac{1}{c} V_i \tag{10.08}$$

мы уже выяснили. Это есть деленная на скорость света относительная скорость движения двух систем отсчета. Точнее, V_i есть составляющая, взятая в нештрихованной системе отсчета, для вектора скорости движения штрихованной системы относительно нештрихованной. Так как формулы обратного преобразования имеют вид

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} x'_k, \tag{10.09}$$

то определяемая из формулы

$$\frac{a_{i0}}{a_{00}} = \frac{1}{c} V'_i \tag{10.10}$$

величина V'_i есть (взятая в штрихованной системе отсчета) составляющая вектора скорости движения нештрихованной системы относительно штрихованной.

Полагая в формулах (10.04) и (10.05) $k = l = 0$, получим

$$a_{00}^2 - (a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2) = 1, \tag{10.11}$$

$$a_{00}^2 - (a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2) = 1, \tag{10.12}$$

откуда, в соединении с (10.08) и (10.10), следует

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2, \tag{10.13}$$

$$V^2 = V'^2, \tag{10.14}$$

где под V^2 мы разумеем квадрат абсолютной величины скорости. Это значит, что абсолютная величина векторов относительной скорости в той и другой системе отсчета одинакова — результат, который нельзя считать очевидным, хотя он вполне согласуется с нашими наглядными представлениями.

Из уравнений (10.08) и (10.12) следует

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10.15}$$

При корне квадратном нужно взять положительный знак, ибо

$$a_{00} = \frac{\partial t'}{\partial t} > 0. \tag{10.16}$$

Отрицательный знак при a_{00} означал бы изменение направления счета времени.

Из (10.08) и (10.15) получаем

$$a_{0i} = \frac{V_i}{\sqrt{c^2 - V^2}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{10.17}$$

и аналогично из (10.10) и (10.15)

$$a_{i0} = \frac{V'_i}{\sqrt{c^2 - V^2}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.18}$$

Если в условиях ортогональности положить один из значков равным нулю и воспользоваться (10.17) и (10.18), мы получим

$$a_{00}V'_i = a_{i1}V_1 + a_{i2}V_2 + a_{i3}V_3 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{10.19}$$

$$a_{00}V_i = a_{1i}V'_1 + a_{2i}V'_2 + a_{3i}V'_3 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.20}$$

Если оба значка не равны нулю, то условия ортогональности дают

$$a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k} = \delta_{ik} + \frac{V_iV_k}{c^2 - V^2}. \tag{10.21}$$

Введем вместо a_{ik} (для $i,\ k = 1,\ 2,\ 3$) новые величины α_{ik}, положив

$$\alpha_{ik} = -a_{ik} + \frac{a_{i0}a_{0k}}{a_{00} + 1} \tag{10.22}$$

или

$$\alpha_{ik} = -a_{ik} + (a_{00} - 1)\frac{V'_iV_k}{V^2}. \tag{10.23}$$

Легко проверить, что вследствие (10.20) и (10.21) будет тогда

$$\alpha_{1i}\alpha_{1k} + \alpha_{2i}\alpha_{2k} + \alpha_{3i}\alpha_{3k} = \delta_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.24}$$

Величины α_{ik} представляют, следовательно, коэффициенты трехмерного ортогонального преобразования и могут быть истолкованы как косинусы углов между старыми и новыми координатными осями, причем в α_{ik} первый значок относится к новым, а второй — к старым осям. Формулы (10.22) дают вследствие (10.19) и (10.20)

$$\alpha_{i1}V_1 + \alpha_{i2}V_2 + \alpha_{i3}V_3 = -V'_i, \tag{10.25}$$

$$\alpha_{1i}V'_1 + \alpha_{2i}V'_2 + \alpha_{3i}V'_3 = -V_i \tag{10.26}$$

Последние соотношения можно толковать в том смысле, что вектор $\mathbf{V}'$ (вектор скорости нештрихованной системы относительно штрихованной) и вектор $\mathbf{V}$ (вектор скорости штрихованной системы относительно нештрихованной) равны по величине и противоположны по направлению.

Полученные формулы позволяют выразить все коэффициенты преобразования Лоренца через косинусы α_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ и через три составляющие V_1, V_2, V_3 вектора относительной скорости. Так как девять косинусов α_{ik} связаны шестью соотношениями (10.23) и выражаются через три независимые величины, то всего в преобразование Лоренца входит шесть параметров (не считая постоянных членов a_i, которые мы положили равными нулю).

Для коэффициентов a_{00} и a_{0i} мы уже получили выражения (10.15) и (10.17). Для коэффициентов a_{i0} мы можем взять выражение (10.18) в котором под V_i' мы должны разуметь его значение из (10.24). Подробнее будет

$$a_{i0} = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{il} V_l \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{10.27}$$

Наконец, для коэффициентов a_{ik} мы получаем из (10.23):

$$a_{ik} = -\alpha_{ik} + (a_{00} - 1)\frac{V_i' V_k}{V^2}, \tag{10.28}$$

или подробнее

$$a_{ik} = -\alpha_{ik} - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_k}{V^2} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{il} V_l. \tag{10.29}$$

Подставим найденные значения коэффициентов преобразования Лоренца в формулу (10.07) и будем писать в них для наглядности ct вместо x_0. Мы получим

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c^2}(V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3)\right). \tag{10.30}$$

Что касается пространственных координат, то формулы для них удобнее всего писать в виде

$$x_i' = \sum_{m=1}^{3} \alpha_{im} x_m^*, \tag{10.31}$$

где

$$x_m^* = x_m - V_m t + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_m}{V^2} \sum_{k=1}^{3} V_k (x_k - V_k t). \tag{10.32}$$

Таким образом, общее преобразование Лоренца можно выполнить в два этапа. Первый этап состоит в переходе от переменных (x_1, x_2, x_3, t) к переменным $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$, где x_1^*, x_2^*, x_3^* определяются из (10.31), а t^* совпадает с t' и равно

$$t^* = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c^2}(V_1x_1 + V_2x_2 + V_3x_3)\right). \tag{10.33}$$

Второй этап состоит в переходе от $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ к (x_1', x_2', x_3', t'), где, согласно (10.30) и (10.31),

$$x_i' = \alpha_{i1}x_1^* + \alpha_{i2}x_2^* + \alpha_{i3}x_3^*; \qquad t' = t^*. \tag{10.34}$$

Очевидно, что второй этап есть простой поворот пространственной координатной системы, тогда как первый этап есть переход к системе отсчета, движущейся со скоростью (V_1, V_2, V_3), причем этот переход не сопровождается поворотом осей.

Мы могли бы, конечно, сперва произвести поворот осей, а затем перейти к движущейся системе отсчета.

Обратное преобразование может быть также произведено в два этапа: во-первых, переход от (x_1', x_2', x_3', t') к $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ по формулам

$$x_i^* = \alpha_{1i}x_1' + \alpha_{2i}x_2' + \alpha_{3i}x_3'; \qquad t^* = t', \tag{10.35}$$

представляющим простой поворот осей и, во-вторых, переход от $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ к (x_1, x_2, x_3, t) по формулам

$$x_m = x_m^* + V_m t^* + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_m}{V^2}\sum_{k=1}^{3} V_k(x_k^* + V_k t^*), \tag{10.36}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t^* + \frac{1}{c^2}(V_1x_1^* + V_2x_2^* + V_3x_3^*)\right), \tag{10.37}$$

представляющим обращение формул (10.32), (10.33). Прямые и обратные формулы, связывающие $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ с (x_1, x_2, x_3, t), получаются друг из друга изменением знака скорости V_i.

Заметим, что якобиан этих формул перехода равен единице. Что касается подстановки (10.34) и обратной ей (10.35), то якобиан этих подстановок будет равен единице, если они представляют поворот осей в собственном смысле (не сопровождаемый переходом от правой координатной системы и левой или наоборот). Отсюда следует, что при условии сохранения направления отсчета времени и сохранения правой (или левой) системы пространственных координат якобиан преобразования Лоренца будет равен единице. В таком случае преобразование Лоренца принято называть собственным преобразованием. В дальнейшем мы будем пользоваться только собственным преобразованием Лоренца.

Поворот осей не представляет, в сущности, перехода к другой инерциальной системе и поэтому для нас не интересен. Характерные особенности преобразования Лоренца заключаются в формулах (10.32), (10.33) и обратных им (10.36), (10.37). Эти формулы упростятся, если выбрать координатные оси так, чтобы направление одной из них, например первой, совпало с направлением относительной скорости V. Полагая

$$V_1 = V; \qquad V_2 = V_3 = 0, \tag{10.38}$$

мы получим из (10.32) и (10.33):

$$\overset{*}{x}_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \qquad \overset{*}{x}_2 = x_2; \qquad \overset{*}{x}_3 = x_3, \tag{10.39}$$

$$t^* = \frac{t - \frac{Vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10.40}$$

Обратные формулы получатся отсюда заменой V на $-V$. Для большей наглядности мы будем писать x, y, z вместо x_1, x_2, x_3. Заменив звездочку штрихом, мы получим тогда

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z, \tag{10.41}$$

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{10.42}$$

и, выражая x, t через x', t',

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z', \tag{10.43}$$

$$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10.44}$$

Эти формулы дают частное преобразование Лоренца, которое, однако, содержит в себе все характерные особенности общего преобразования.