§ 13. Сравнение промежутков времени в движущихся системах отсчета. Явление Допплера

Пусть дана некоторая система отсчета (базис), которую мы будем принимать за неподвижную. Проследим с точки зрения этого базиса за ходом некоторого процесса в движущейся системе. В качестве такого процесса можно взять, например, равномерный ход часов, связанных с движущейся системой. Проследить за ходом часов, если они движутся, можно, скажем, заставив их ежесекундно испускать световые сигналы (или просто рассматривая издали показания их стрелок). Кроме того, нужно иметь на базисе такое устройство (скажем радиолокационное), которое бы непрерывно отмечало расстояние от базиса до движущихся часов. Тогда, отмечая по часам базиса моменты поступления „ежесекундных" световых сигналов и вводя каждый раз поправку на время прохождения сигнала от движущихся часов до базиса, мы можем определить моменты t_n испускания этих „ежесекундных" сигналов. Поправка эта вычисляется весьма просто.

Пусть $r(t)$ есть измеренное с базиса расстояние до движущихся часов, выраженное в функции времени t на базисе. Тогда величина t_n получается из непосредственно наблюденной величины t_n^* по формуле

$$t_n + \frac{r(t_n)}{c} = t_n^*. \tag{13.01}$$

Возникает вопрос, будут ли моменты времени t_n также ежесекундными? Другими словами, если на базисе имеются часы точно такого же устройства, как наблюдаемые с базиса движущиеся часы, то будут ли вычисляемые моменты времени t_n совпадать с секундами по часам на базисе?

Ответ на этот вопрос дается формулами преобразования Лоренца. Предположим, что часы удаляются от базиса по прямой, проходящей через начало координат на базисе. (Мы считаем, что прибор, регистрирующий сигналы, находится в начале координат.) Беря эту прямую за ось x и предполагая, что при $t = 0$ часы проходили через начало, мы можем определить положение движущихся часов уравнениями

$$x = vt; \quad y = 0; \quad z = 0, \tag{13.02}$$

причем величина x будет также расстоянием r от базиса. Применение формулы (13.01) показывает, что секундный сигнал, воспринятый на базисе в момент t_n^*, был испущен в момент времени

$$t_n = \frac{t_n^*}{1 + \frac{v}{c}} \tag{13.03}$$

по часам базиса. Введем теперь по формулам преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{13.04}$$

систему отсчета, связанную с движущимися часами. Обратные формулы, как мы знаем, имеют вид

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.05}$$

В штрихованной системе положение часов, подающих сигналы, будет $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, а моменты отправления сигналов будут

$$t'_n = n\tau, \tag{13.06}$$

где постоянная τ (зависящая только от устройства часов, но не от их движения) равна, скажем, 1 секунде. Следовательно, будет

$$t_n = \frac{n\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.07}$$

С другой стороны, часы такого же устройства, имеющиеся на базисе, отбивают моменты времени $n\tau$. Таким образом, наблюдаемые с базиса движущиеся часы будут *отставать* по сравнению с часами на базисе. Определяемые по наблюдениям на базисе моменты отправления сигналов будут отстоять не на величину τ (одну секунду), а на бо́льшую величину

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.08}$$

Необходимо помнить, что этот результат получается уже после введения поправки на конечную скорость распространения сигналов. Непосредственно же наблюдаются моменты прибытия сигналов на базис, равные

$$t_n^* = \left(1 + \frac{v}{c}\right) t_n = n\tau \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \tag{13.09}$$

и отстоящие друг от друга на величину

$$\Delta t^* = \tau \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}. \tag{13.10}$$

Для простоты выкладок мы рассматривали тот случай, когда движущиеся часы удаляются прямо от наблюдателя (т. е. от прибора,

регистрирующего посылаемые ими световые сигналы). Рассмотрим теперь более общий случай, когда траектория часов не проходит через прибор. Пусть прибор попрежнему расположен в начале координат, а движение часов определяется, вместо (13.02), уравнениями

$$x = vt; \quad y = y_0; \quad z = z_0 \tag{13.11}$$

в системе отсчета, связанной с базисом, и уравнениями

$$x' = 0; \quad y' = 0; \quad z' = 0 \tag{13.12}$$

в системе отсчета, связанной с часами.

Переход от одной системы отсчета к другой дается попрежнему преобразованием Лоренца (13.04)—(13.05). Поэтому связь между t' и t, а значит и формула (13.08), дающая отставание движущихся часов, остается без изменения. Изменится только связь между t^* и t, т. е. формула для пересчета от момента приема к моменту испускания сигнала. А именно, мы будем иметь, вместо (13.09)

$$t_n^* = t_n + \frac{1}{c}\sqrt{v^2 t_n^2 + y_0^2 + z_0^2}. \tag{13.13}$$

Считая промежуток времени τ малым, мы можем положить

$$\Delta t^* = \frac{dt^*}{dt}\Delta t = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)\Delta t, \tag{13.14}$$

где

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{v^2 t}{\sqrt{v^2 t^2 + y_0^2 + z_0^2}} \tag{13.15}$$

есть радиальная составляющая скорости часов в момент испускания ими сигнала. Из (13.08) и (13.14) получаем

$$\Delta t^* = \tau \cdot \frac{c + v_r}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{13.16}$$

Эта формула заменяет (13.10) для общего случая.

Отличие Δt^* от τ является выражением эффекта Допплера, который, как известно, состоит в следующем. Если в движущейся системе происходит периодический процесс с периодом τ, то регистрируемый в некоторой точке неподвижной системы период Δt^* оказывается большим чем τ, когда система удаляется от этой точки, и меньшим чем τ, когда система приближается к ней. Формула (13.16) дает релятивистское выражение эффекта Допплера для случая распространения света в свободном пространстве. Классическая дорелятивистская формула получится, если не делать различия между t' и t и заменить в (13.14) Δt на τ (это вносит относительную ошибку порядка v^2/c^2).

Заметим, что исторически первое определение скорости света в свободном пространстве, произведенное в 1675 г. Олафом Ремером, было,

в сущности, основано на эффекте Допплера. Движущимися часами служила система спутников Юпитера, а наблюдавшийся периодический процесс состоял в периодических затмениях спутников. Примерно на протяжении половины земной орбиты Земля приближается к Юпитеру, и тогда $v_r < 0$, на протяжении другой половины Земля удаляется от Юпитера, и тогда $v_r > 0$. Применяя вместо (13.16) упрощенную формулу (13.14), можно взять в качестве Δt средний (за год) наблюдаемый промежуток времени между двумя затмениями. Тогда на той части земной орбиты, где $v_r < 0$, будет $\Delta t^* < \Delta t$, т. е. будет наблюдаться опережение затмений по сравнению со средним, а на той части, где $v_r > 0$, будет $\Delta t^* > \Delta t$, т. е. будет наблюдаться запаздывание. Так как скорость v_r известна из теории движения Земли и Юпитера, то соотношение (13.14) дает возможность вычислить скорость света c. Ремер получил таким путем значение c равное $3{,}1 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, т. е. чрезвычайно близкое к принятому теперь значению $3{,}0 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, полученному гораздо более точными методами.

Подчеркнем еще раз, что в теории явления Допплера учитываются два фактора: во-первых, пересчет от момента t^* прибытия к моменту t испускания светового сигнала и, во-вторых, связь между временем t в системе отсчета, в которой сигналы регистрируются, и временем t' в системе отсчета, связанной с телом, которое эти сигналы испускает. Первый из этих факторов (пересчет от t^* к t) вводит множитель, зависящий от радиальной составляющей скорости; этот фактор учитывался уже в дорелятивистской теории. Второй фактор (пересчет от t^* к t) вводит множитель, зависящий от абсолютной величины скорости; он основан на преобразовании Лоренца и является характерным для теории относительности.

§ 14. Сличение показаний часов в движущихся системах отсчета

В предыдущем параграфе мы рассмотрели способ сравнения промежутков времени в разных системах отсчета, основанный на использовании световых сигналов, с учетом времени их распространения. Принципиально возможен, однако, и другой способ, в котором сравниваются показания часов, проходящих в непосредственной близости друг от друга.

Представим себе ряд часов, расположенных на одной прямой, принадлежащих одному базису, неподвижных в нем и заранее синхронизованных друг с другом. Пусть мимо них движутся часы A. Чтобы проследить за ходом часов A, достаточно сличить их показания с показаниями тех часов базиса, мимо которых они в данный момент проходят. Очевидно, достаточно иметь на базисе двое часов; можно представить себе базис состоящим из этих двоих часов, соединенных твердым стержнем.