в сущности, основано на эффекте Допплера. Движущимися часами служила система спутников Юпитера, а наблюдавшийся периодический процесс состоял в периодических затмениях спутников. Примерно на протяжении половины земной орбиты Земля приближается к Юпитеру, и тогда $v_r < 0$, на протяжении другой половины Земля удаляется от Юпитера, и тогда $v_r > 0$. Применяя вместо (13.16) упрощенную формулу (13.14), можно взять в качестве Δt средний (за год) наблюдаемый промежуток времени между двумя затмениями. Тогда на той части земной орбиты, где $v_r < 0$, будет $\Delta t^* < \Delta t$, т. е. будет наблюдаться опережение затмений по сравнению со средним, а на той части, где $v_r > 0$, будет $\Delta t^* > \Delta t$, т. е. будет наблюдаться запаздывание. Так как скорость v_r известна из теории движения Земли и Юпитера, то соотношение (13.14) дает возможность вычислить скорость света c. Ремер получил таким путем значение c равное $3{,}1 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, т. е. чрезвычайно близкое к принятому теперь значению $3{,}0 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, полученному гораздо более точными методами.

Подчеркнем еще раз, что в теории явления Допплера учитываются два фактора: во-первых, пересчет от момента t^* прибытия к моменту t испускания светового сигнала и, во-вторых, связь между временем t в системе отсчета, в которой сигналы регистрируются, и временем t' в системе отсчета, связанной с телом, которое эти сигналы испускает. Первый из этих факторов (пересчет от t^* к t) вводит множитель, зависящий от радиальной составляющей скорости; этот фактор учитывался уже в дорелятивистской теории. Второй фактор (пересчет от t^* к t) вводит множитель, зависящий от абсолютной величины скорости; он основан на преобразовании Лоренца и является характерным для теории относительности.

§ 14. Сличение показаний часов в движущихся системах отсчета

В предыдущем параграфе мы рассмотрели способ сравнения промежутков времени в разных системах отсчета, основанный на использовании световых сигналов, с учетом времени их распространения. Принципиально возможен, однако, и другой способ, в котором сравниваются показания часов, проходящих в непосредственной близости друг от друга.

Представим себе ряд часов, расположенных на одной прямой, принадлежащих одному базису, неподвижных в нем и заранее синхронизованных друг с другом. Пусть мимо них движутся часы A. Чтобы проследить за ходом часов A, достаточно сличить их показания с показаниями тех часов базиса, мимо которых они в данный момент проходят. Очевидно, достаточно иметь на базисе двое часов; можно представить себе базис состоящим из этих двоих часов, соединенных твердым стержнем.

В системе отсчета базиса координаты неподвижных часов и движущихся часов A будут

$$\left.\begin{aligned} &x = a \text{ (первые часы базиса)},\\ &x = b \text{ (вторые часы базиса)},\\ &x = vt \text{ (часы } A).\end{aligned}\right\} \tag{14.01}$$

По формулам преобразования Лоренца (13.04) — (13.05) мы можем ввести систему отсчета, связанную с часами A. В ней координаты часов базиса и часов A будут

$$\left.\begin{aligned} &x = -vt' + a' \text{ (первые часы базиса)},\\ &x' = -vt' + b' \text{ (вторые часы базиса)},\\ &x' = 0 \qquad\qquad \text{ (часы } A),\end{aligned}\right\} \tag{14.02}$$

где постоянные a' и b' связаны с a и b соотношениями

$$a' = a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad b' = b\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{14.03}$$

Не становясь на точку зрения какой-либо из этих двух систем отсчета, мы запишем следующие объективные данные: во-первых, показания часов A и первых часов базиса, когда они приходились друг против друга, и, во-вторых, показания часов A и вторых часов базиса, когда друг против друга приходились они. Обозначая показания часов A через t_1' и t_2' и соответственные показания первых и вторых часов базиса через t_1 и t_2, будем иметь, вследствие (14.01) и (14.02):

$$\left.\begin{aligned} &t_1 = \frac{a}{v}; \quad t_1' = \frac{a'}{v},\\ &t_2 = \frac{b}{v}; \quad t_2' = \frac{b'}{v},\end{aligned}\right\} \tag{14.04}$$

причем, вследствие (14.03),

$$t_1' = t_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad t_2' = t_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{14.05}$$

Эти данные позволяют нам судить, с одной стороны, о ходе часов A, наблюдаемом с базиса, и, с другой стороны, о ходе часов базиса, наблюдаемом в системе отсчета, связанной с A. Под ходом процесса, наблюдаемым в той или иной системе отсчета, мы разумеем ход процесса, выраженный через то время, которое соответствует присущей данной системе отсчета синхронизации.

Величины t_1 и t_2 представляют показания разных часов базиса; но так как в системе отсчета базиса эти часы синхронизованы, то, употребляя слово „когда“ в смысле *этой* синхронизации, мы можем утверждать, что когда вторые часы показывали время t_2, то и первые часы показывали то же время t_2. Поэтому разность t_2-t_1 представляет просто время, протекшее в системе отсчета базиса, пока показания часов A изменились на $t'_2-t'_1$. Таким образом, ход часов A, наблюдаемый с базиса, определяется уравнением

$$t'_2-t'_1=(t_2-t_1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (14.06)$$

Так как $|t'_2-t'_1|<|t_2-t_1|$, то часы A, наблюдаемые с базиса, будут *отставать*. Полагая $t'_2-t'_1=\tau$, $t_2-t_1=\Delta t$, мы получим совпадение с формулой (13.08).

Рассмотрим теперь ход часов базиса, наблюдаемый в системе отсчета, связанной с A. Чтобы судить о ходе часов, необходимо проследить за показаниями *одних и тех же* часов, в данном случае — за показаниями либо первых, либо вторых часов базиса. Остановимся для определенности на вторых часах. Для них мы имеем только одно *непосредственное* показание (когда они находились против часов A, показывавших время t'_2, сами они показывали время t_2). Другое показание вторых часов нужно *вычислить* по имеющимся данным. Поставим поэтому вопрос: где были вторые часы и сколько они показывали, когда против часов A находились первые часы? Существенно помнить, что слова „где" и „когда" употребляются теперь в смысле системы отсчета, связанной с A (в смысле штрихованной системы). На этот вопрос легко ответить. Когда против A находились первые часы, часы A показывали время $t'_1=\frac{a'}{v}$, вторые же часы находились тогда (согласно 14.02) в точке $x'=b'-a'$. Показание t вторых часов получится подстановкой значений $t'=t'_1$ и $x'=b'-a'$ в формулу преобразования Лоренца (13.05). Мы будем иметь

$$t=\frac{t'_1+\frac{v}{c^2}(b'-a')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=t_1+\frac{v}{c^2}(b-a) \qquad (14.07)$$

или

$$t=t_1+(t_2-t_1)\frac{v^2}{c^2}. \qquad (14.08)$$

(Показание t вторых часов уже не будет совпадать с показанием t_1 первых часов, потому что одновременность понимается теперь в смысле системы отсчета, связанной с A, а не с базисом). Вычисленное по формуле (14.08) показание вторых часов вместе с непосредственно наблюденным их показанием t_2 позволяет определить ход вторых часов в системе отсчета, связанной с часами A. Мы имеем

$$t_2-t=(t_2-t_1)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right), \qquad (14.09)$$

откуда окончательно

$$t_2 - t = (t_2' - t_1')\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (14.10)$$

Таким образом, в системе отсчета A движущиеся относительно нее часы на базисе опять-таки *отстают*, и мы имеем относительно обеих систем отсчета полную взаимность.

Иногда говорят, что в движущейся системе время идет медленнее, чем в неподвижной. Такая формулировка, однако, неправильна, так как, на основании принципа относительности, всегда можно поменять ролями движущуюся и неподвижную систему, и тогда получилось бы противоречие.

Характер возникающих здесь недоразумений легче всего пояснить на математическом примере (который, впрочем, имеет прямое отношение к данному вопросу). Мы видели в § 10, что для преобразования Лоренца

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1. \qquad (14.11)$$

Но и для обратного преобразования мы имеем

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1. \qquad (14.12)$$

Если забыть про то, что в (14.11) производная по t берется при постоянных x, y, z, а в (14.12) производная по t' берется при постоянных x', y', z', то может показаться странным, что $\frac{\partial t}{\partial t'}$ не равно обратной величине $\frac{\partial t'}{\partial t}$, а равно ей самой. Ясно, однако, что никакого „парадокса“ тут нет.

Возвращаясь к физической стороне дела, можно сказать, что в данной задаче речь идет не о „ходе времени“ в разных системах отсчета, а об описании хода некоторого *локализованного процесса* в разных системах отсчета. Пусть процесс локализован в точке, неподвижной в нештрихованной системе отсчета (постоянные x, y, z). Тогда из $\frac{\partial t'}{\partial t} > 1$ мы заключаем, что длительность (или период) процесса в „своей“ (нештрихованной) системе отсчета будет меньше, чем во всякой другой (штрихованной) системе, которая относительно „своей“ системы движется. Если же процесс локализован в точке с постоянными координатами x', y', z', то „своей“ системой будет штрихованная, и мы будем иметь $\frac{\partial t}{\partial t'} > 1$, но по существу заключение не изменится.

Если длительность процесса в „своей“ системе отсчета была $d\tau$ то в другой системе отсчета, движущейся относительно нее со скоростью V, она будет равна $dt > d\tau$, причем

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, dt. \tag{14.13}$$

Здесь V есть скорость, входящая в преобразование Лоренца, связывающее обе рассматриваемые системы отсчета. По абсолютной величине V равно той скорости v, с которой движется точка, где локализован процесс, и составляющие которой равны

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{14.14}$$

Поэтому мы можем, вместо (14.13), написать

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{14.15}$$

Нетрудно видеть, что это выражение является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца. Величину $d\tau$ можно рассматривать, как дифференциал „собственного времени“ τ, определяемого уравнением

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{14.16}$$

(Здесь принято, что при $t = 0$ будет $\tau = 0$). Если скорость v — постоянная, то τ есть измеренная в „своей“ системе отсчета длительность процесса, связанного с движущейся точкой (отсюда название „собственное время“). Если же скорость v — переменная, то τ не имеет прямого физического смысла, а представляет вспомогательную математическую величину, которой удобно пользоваться ввиду ее инвариантности по отношению к преобразованию Лоренца. Название „собственного времени“ сохраняется за величиной τ и в случае переменной скорости v, хотя в этом случае его нельзя понимать буквально.

То обстоятельство, что в случае ускоренного движения величину τ нельзя толковать, как время, показываемое часами, движущимися с заданной скоростью, вытекает из теории тяготения Эйнштейна; в этой теории для времени, показываемого часами, дается другое выражение (см. §§ 61 и 62). Что касается обычной теории относительности, то она позволяет делать в общем виде (т. е. не вникая в сущность происходящих процессов) только те заключения, которые относятся к *неускоренному* движению. Только случай неускоренного движения сводится к рассмотрению разных инерциальных систем отсчета (что, собственно, и составляет предмет теории относительности). Поэтому, в случае ускоренного движения, толкование величины τ, как времени, показываемого движущимися часами, из теории относительности вытекать не может. Такое толкование могло бы быть выдвинуто в качестве отдельного предположения, однако это предположение не оправдывается. Вообще же никакая теория не может, не входя в детали устройства часов, предсказать, как будут себя вести эти часы в условиях, когда они подвергаются толчкам или произвольному ускорению. Этого не может сделать и теория тяготения; упомянутое выражение для времени, показываемого ускоренно движущимися часами, относится к тому случаю, когда это ускорение вызвано полем тяготения.

§ 15. Сравнение расстояний и длин в движущихся системах отсчета

Если предмет в данной системе отсчета неподвижен, то определение его геометрических размеров и формы необязательно должно происходить мгновенно. Неподвижный предмет можно обмерить постепенно, отметив последовательно положение разных его точек. Напротив того, чтобы судить о размерах и форме движущегося предмета, совершенно необходимо, чтобы все отмеченные положения разных его точек относились к одному моменту времени: иначе мы получим искаженную картину.

Отсюда ясно, что понятие о размерах и форме движущегося предмета тесно связано с понятием об одновременности. Мы уже видели, что понятие одновременности не является абсолютным, а зависит от системы отсчета; поэтому мы должны ожидать, что размеры и форма предмета также не являются абсолютными, а должны задаваться по отношению к определенной системе отсчета.

В качестве простейшего примера рассмотрим длину стержня, измеряемую в разных системах отсчета.

Пусть две системы отсчета движутся друг относительно друга в направлении их общей оси x. Координаты и время в них связаны преобразованием Лоренца, которое мы выпишем здесь еще раз. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad & t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y; & z' &= z. \end{aligned}\right\} \tag{15.01}$$

Пусть направление стержня совпадает с направлением относительной скорости движения обеих систем отсчета (с осью X) и пусть стержень неподвижен в нештрихованной системе. В этой системе отсчета координаты обоих концов стержня будут все время

$$\left.\begin{aligned} &x = a; \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{(первый конец стержня)}, \\ &x = b, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{(второй конец стержня)}, \end{aligned}\right\} \tag{15.02}$$