толкование величины τ, как времени, показываемого движущимися часами, из теории относительности вытекать не может. Такое толкование могло бы быть выдвинуто в качестве отдельного предположения, однако это предположение не оправдывается. Вообще же никакая теория не может, не входя в детали устройства часов, предсказать, как будут себя вести эти часы в условиях, когда они подвергаются толчкам или произвольному ускорению. Этого не может сделать и теория тяготения; упомянутое выражение для времени, показываемого ускоренно движущимися часами, относится к тому случаю, когда это ускорение вызвано полем тяготения.

§ 15. Сравнение расстояний и длин в движущихся системах отсчета

Если предмет в данной системе отсчета неподвижен, то определение его геометрических размеров и формы необязательно должно происходить мгновенно. Неподвижный предмет можно обмерить постепенно, отметив последовательно положение разных его точек. Напротив того, чтобы судить о размерах и форме движущегося предмета, совершенно необходимо, чтобы все отмеченные положения разных его точек относились к одному моменту времени: иначе мы получим искаженную картину.

Отсюда ясно, что понятие о размерах и форме движущегося предмета тесно связано с понятием об одновременности. Мы уже видели, что понятие одновременности не является абсолютным, а зависит от системы отсчета; поэтому мы должны ожидать, что размеры и форма предмета также не являются абсолютными, а должны задаваться по отношению к определенной системе отсчета.

В качестве простейшего примера рассмотрим длину стержня, измеряемую в разных системах отсчета.

Пусть две системы отсчета движутся друг относительно друга в направлении их общей оси x. Координаты и время в них связаны преобразованием Лоренца, которое мы выпишем здесь еще раз. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad & t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y; & z' &= z. \end{aligned}\right\} \tag{15.01}$$

Пусть направление стержня совпадает с направлением относительной скорости движения обеих систем отсчета (с осью X) и пусть стержень неподвижен в нештрихованной системе. В этой системе отсчета координаты обоих концов стержня будут все время

$$\left.\begin{aligned} x &= a; \quad & y &= 0, \quad & z &= 0 \quad & &\text{(первый конец стержня),} \\ x &= b, & y &= 0, & z &= 0 & &\text{(второй конец стержня),} \end{aligned}\right\} \tag{15.02}$$

и если $b > a$, то длина стержня l будет

$$l = b - a. \tag{15.03}$$

В движущейся относительно стержня штрихованной системе отсчета координаты его концов будут

$$\left.\begin{array}{llll} x' = -vt' + a', & y' = 0, & z' = 0 & \text{(первый конец),} \\ x' = -vt' + b', & y' = 0, & z' = 0 & \text{(второй конец),} \end{array}\right\} \tag{15.04}$$

где

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad b' = b\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15.05}$$

Длина стержня есть расстояние между одновременными положениями его концов. В штрихованной системе отсчета одновременность понимается в смысле одинаковых значений t', а расстояние выражается по обычной формуле через разности штрихованных координат. Поэтому в штрихованной системе длина стержня будет равна

$$l' = b' - a'. \tag{15.06}$$

Отсюда

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15.07}$$

Таким образом, в той системе отсчета, в которой стержень имеет (в направлении своей длины) скорость v, стержень оказывается укороченным: длина его l' будет меньше той длины l, какая получается для неподвижного стержня.

Если бы мы ввели в рассмотрение поперечные размеры стержня (в направлениях осей y и z, перпендикулярных к скорости), то мы убедились бы, что эти поперечные размеры не меняются. Следовательно, объем стержня уменьшается в той же пропорции, как его продольные размеры. То же заключение остается справедливым для тела произвольной формы. Если V есть объем тела в той системе отсчета, где оно неподвижно, то в системе, относительно которой тело движется со скоростью v, объем его V' будет равен

$$V' = V \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15.08}$$

Пусть имеются два одинаковых параллельных стержня, относительная скорость которых параллельна их длине. Тогда в системе отсчета, связанной с первым стержнем, второй будет представляться укороченным и наоборот. Положение вещей здесь то же, как в примере с часами; так же как и там, здесь нет никакого парадокса. Различие в получаемых значениях длины происходит от различия в определении одновременности. Положения концов стержня, которые были одновременными в одной системе отсчета, уже не будут таковыми в другой системе отсчета (там они будут только квазиодновременными). Пусть x_a есть положение конца A в момент времени t_a, а x_b — положение конца B в момент времени t_b. Соответствующие величины в другой системе отсчета мы обозначим теми же буквами со штрихами. В силу инвариантности пространственного интервала мы имеем

$$(x_a - x_b)^2 - c^2(t_a - t_b)^2 = (x'_a - x'_b)^2 - c^2(t'_a - t'_b)^2. \quad (15.09)$$

Если мы положим здесь $t_a = t_b$, то будет $t'_a \neq t'_b$ и, следовательно,

$$|x_a - x_b| < |x'_a - x'_b|. \quad (15.10)$$

Слева стоит длина стержня в нештрихованной системе; величина же в правой части будет длиной стержня в штрихованной системе, если он там неподвижен (ибо тогда необязательно относить x'_a и x'_b к одному и тому же моменту времени t', а можно брать и $t'_a \neq t'_b$).

Если же мы положим $t'_a = t'_b$, то будет $t_a \neq t_b$ и, следовательно,

$$|x_a - x_b| > |x'_a - x'_b|. \quad (15.11)$$

Но теперь левая часть есть длина стержня в той системе отсчета, где он неподвижен, тогда как правая часть есть длина в произвольной штрихованной системе.

В этих рассуждениях симметрия формул относительно штрихованной и нештрихованной системы отсчета очевидна с самого начала; поэтому и самые рассуждения могут показаться тривиальными. Мы привели их для того, чтобы еще раз обратить внимание на тесную связь между понятиями одновременности и длины.

§ 16. Относительная скорость

В дорелятивистской механике относительная скорость двух тел определялась как разность их скоростей. Пусть измеренная в определенной системе отсчета скорость одного тела есть $\mathbf{u}$, а другого $\mathbf{v}$. Тогда скорость второго тела относительно первого полагалась равной $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Такое определение является инвариантным относительно преобразования Галилея, но не относительно преобразования Лоренца. Поэтому оно в теории относительности не годится и должно быть заменено другим. То обстоятельство, что выражение $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ не имеет физического смысла, становится очевидным из рассмотрения следующего примера. Пусть скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ направлены в противоположные стороны, а по абсолютной величине близки к скорости света (или равны ей). Тогда „скорость“ $\mathbf{w}$ будет по абсолютной величине близка (или равна) удвоенной скорости света, что явно нелепо.

Мы дадим поэтому новое определение относительной скорости, согласное с требованиями теории относительности и имеющее прямой физический смысл. Пусть в некоторой системе отсчета скорость первого тела есть $\mathbf{u}$, а второго тела $\mathbf{v}$. Мы можем ввести такую (штрихованную) систему отсчета, в которой скорость одного из тел