ствующие величины в другой системе отсчета мы обозначим теми же буквами со штрихами. В силу инвариантности пространственного интервала мы имеем

$$(x_a - x_b)^2 - c^2 (t_a - t_b)^2 = (x'_a - x'_b)^2 - c^2 (t'_a - t'_b)^2. \tag{15.09}$$

Если мы положим здесь $t_a = t_b$, то будет $t'_a \neq t'_b$ и, следовательно,

$$|x_a - x_b| < |x'_a - x'_b|. \tag{15.10}$$

Слева стоит длина стержня в нештрихованной системе; величина же в правой части будет длиной стержня в штрихованной системе, если он там неподвижен (ибо тогда необязательно относить x'_a и x'_b к одному и тому же моменту времени t', а можно брать и $t'_a \neq t'_b$).

Если же мы положим $t'_a = t'_b$, то будет $t_a \neq t_b$ и, следовательно,

$$|x_a - x_b| > |x'_a - x'_b|. \tag{15.11}$$

Но теперь левая часть есть длина стержня в той системе отсчета, где он неподвижен, тогда как правая часть есть длина в произвольной штрихованной системе.

В этих рассуждениях симметрия формул относительно штрихованной и нештрихованной системы отсчета очевидна с самого начала; поэтому и самые рассуждения могут показаться тривиальными. Мы привели их для того, чтобы еще раз обратить внимание на тесную связь между понятиями одновременности и длины.

§ 16. Относительная скорость

В дорелятивистской механике относительная скорость двух тел определялась как разность их скоростей. Пусть измеренная в определенной системе отсчета скорость одного тела есть $\mathbf{u}$, а другого $\mathbf{v}$. Тогда скорость второго тела относительно первого полагалась равной $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Такое определение является инвариантным относительно преобразования Галилея, но не относительно преобразования Лоренца. Поэтому оно в теории относительности не годится и должно быть заменено другим. То обстоятельство, что выражение $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ не имеет физического смысла, становится очевидным из рассмотрения следующего примера. Пусть скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ направлены в противоположные стороны, а по абсолютной величине близки к скорости света (или равны ей). Тогда „скорость“ $\mathbf{w}$ будет по абсолютной величине близка (или равна) удвоенной скорости света, что явно нелепо.

Мы дадим поэтому новое определение относительной скорости, согласное с требованиями теории относительности и имеющее прямой физический смысл. Пусть в некоторой системе отсчета скорость первого тела есть $\mathbf{u}$, а второго тела $\mathbf{v}$. Мы можем ввести такую (штрихованную) систему отсчета, в которой скорость одного из тел (например первого) равнялась бы нулю. Тогда скорость $\mathbf{v}'$ второго тела в этой системе отсчета мы и будем толковать, как относительную скорость второго тела по отношению к первому. Мы увидим, что абсолютная величина скорости $\mathbf{v}'$ зависит от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ симметричным образом. Поэтому относительная скорость двух тел не зависит от того, которое из них принимается (в новой системе отсчета) за неподвижное.

Для пояснения физического смысла нашего определения относительной скорости рассмотрим следующий пример. Предположим, что мы наблюдаем с земли два самолета. Пусть скорость первого самолета равна $\mathbf{u}$, а второго $\mathbf{v}$. Предположим теперь, что первый самолет снабжен радиолокационной установкой, позволяющей измерять скорость второго самолета относительно первого. Измеренная таким образом скорость и будет той относительной скоростью, которая отвечает нашему определению.

Нам нужно выразить эту относительную скорость через составляющие скоростей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (через скорости самолетов, наблюдаемые с земли).

Для этого напишем общие формулы преобразования Лоренца, выведенные в § 10. Мы имеем, для прямого преобразования,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{V}t + (a_{00} - 1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r} - V^2 t), \\ t' &= a_{00}\left(t - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (16.01)$$

и для обратного преобразования

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{V}t' + (a_{00} - 1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}' + \mathbf{V}^2 t'), \\ t &= a_{00}\left(t' + \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (16.02)$$

где мы воспользовались обозначением (10.15) и положили

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (16.03)$$

Чтобы в штрихованной системе первый самолет (имевший относительно земли скорость $\mathbf{u}$) был неподвижен, мы должны положить

$$V_x = u_x; \quad V_y = u_y; \quad V_z = u_z. \qquad (16.04)$$

Скорость второго самолета, измеренная с земли, равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad (16.05)$$

тогда как скорость того же второго самолета, измеренная с первого, будет равна

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}. \qquad (16.06)$$

Соотношения между этими величинами получатся дифференцированием формул (16.01)—(16.02). Мы будем иметь

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u} + (a_{00} - 1)\frac{\mathbf{u}}{u^2}\left((\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - u^2\right)}{a_{00}\left(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)}, \tag{16.07}$$

а также

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u}' + (a_{00} - 1)\frac{\mathbf{u}}{u^2}\left((\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}') + u^2\right)}{a_{00}\left(1 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'}{c^2}\right)}, \tag{16.08}$$

где, согласно (16.03) и (16.04),

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{16.09}$$

Уравнение (16.08) представляет решение уравнения (16.07) относительно $\mathbf{v}$. Так как преобразование Лоренца линейно относительно координат и времени, то штрихованные составляющие скорости v'_x, v'_y, v'_z представляют дробно-линейные функции от нештрихованных составляющих v_x, v_y, v_z.

Составим выражение для квадрата вектора $\mathbf{v}'$, т. е. для квадрата относительной скорости первого и второго самолетов. Мы будем иметь

$$v'^2 = \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}. \tag{16.10}$$

Как мы уже отмечали, это выражение симметрично относительно $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Проверим, что из неравенств $u^2 < c^2$, $v^2 < c^2$ вытекает неравенство $v'^2 < c^2$, каковы бы ни были направления векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. В самом деле, мы имеем

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}. \tag{16.11}$$

В силу условий $u^2 < c^2$, $v^2 < c^2$ правая часть здесь всегда положительна; следовательно, будет положительной и левая часть, откуда $v'^2 < c^2$. В предельном случае, когда одна из скоростей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ равна скорости света, относительная скорость $\mathbf{v}'$ также будет равна скорости света, что соответствует основному предположению, на котором построена вся теория относительности.

Заметим, что квадрат относительной скорости является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца. Это значит, что если мы в формулу (16.10) подставим вместо скоростей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ обоих самолетов относительно земли их скорости $\mathbf{u}''$, $\mathbf{v}''$ относительно какой-нибудь третьей системы отсчета (скажем, относительно третьего самолета), то хотя $\mathbf{u}''$, $\mathbf{v}''$ не будут равны $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, но всё выражение (16.10) для v'^2 примет прежнее значение. Очевидно, так и должно быть по самому смыслу величины v'^2 как квадрата относительной скорости.

Формула (16.07) упрощается, если в данной системе отсчета скорости $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ параллельны или если они перпендикулярны. В первом случае мы получим

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \qquad (\text{при} \quad [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = 0), \qquad (16.12)$$

а во втором случае мы будем иметь

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \mathbf{u} \qquad [\text{при } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0]. \qquad (16.13)$$

Формула (16.12) (в которой скорость $\mathbf{u}$ вводится обычно с обратным знаком) носит название эйнштейновой теоремы сложения скоростей.

В общем случае можно высказать следующее утверждение. Если рассматривать „пространство скоростей“ как пространство Лобачевского, то правило сложения скоростей в теории относительности совпадает с правилом сложения векторов в геометрии Лобачевского. Это утверждение будет доказано в следующем параграфе.

§ 17. Пространство скоростей Лобачевского — Эйнштейна

Рассмотрим относительную скорость двух тел, движущихся с бесконечно близкими скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Деленную на скорость света c абсолютную величину этой относительной скорости мы обозначим через ds. Положив в выражении (16.10) $\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, получим, по разделении на c^2,

$$ds^2 = \frac{c^2 (d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}, \qquad (17.01)$$

или иначе

$$ds^2 = \frac{(c^2 - v^2)(d\mathbf{v})^2 + (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v})^2}{(c^2 - v^2)^2}. \qquad (17.02)$$

По физическому смыслу выражения (17.01), пропорционального квадрату бесконечно малой относительной скорости, оно является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца. Это можно проверить и непосредственно, подставив вместо величин v_x, v_y, v_z их выражение из (16.08) в виде дробно-линейных функций от v'_x, v'_y, v'_z: тогда ds^2 будет той же функцией от v'_x, v'_y, v'_z, dv'_x, dv'_y, dv'_z, как от v_x, v_y, v_z, dv_x, dv_y, dv_z.