мы в формулу (16.10) подставим вместо скоростей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ обоих самолетов относительно земли их скорости $\mathbf{u}''$, $\mathbf{v}''$ относительно какой-нибудь третьей системы отсчета (скажем, относительно третьего самолета), то хотя $\mathbf{u}''$, $\mathbf{v}''$ не будут равны $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, но всё выражение (16.10) для v'^2 примет прежнее значение. Очевидно, так и должно быть по самому смыслу величины v'^2 как квадрата относительной скорости.

Формула (16.07) упрощается, если в данной системе отсчета скорости $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ параллельны или если они перпендикулярны. В первом случае мы получим

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \qquad (\text{при} \quad [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = 0), \tag{16.12}$$

а во втором случае мы будем иметь

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \mathbf{u} \qquad [\text{при } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0]. \tag{16.13}$$

Формула (16.12) (в которой скорость $\mathbf{u}$ вводится обычно с обратным знаком) носит название эйнштейновой теоремы сложения скоростей.

В общем случае можно высказать следующее утверждение. Если рассматривать „пространство скоростей“ как пространство Лобачевского, то правило сложения скоростей в теории относительности совпадает с правилом сложения векторов в геометрии Лобачевского. Это утверждение будет доказано в следующем параграфе.

§ 17. Пространство скоростей Лобачевского — Эйнштейна

Рассмотрим относительную скорость двух тел, движущихся с бесконечно близкими скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Деленную на скорость света c абсолютную величину этой относительной скорости мы обозначим через ds. Положив в выражении (16.10) $\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, получим, по разделении на c^2,

$$ds^2 = \frac{c^2 (d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}, \tag{17.01}$$

или иначе

$$ds^2 = \frac{(c^2 - v^2)(d\mathbf{v})^2 + (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v})^2}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17.02}$$

По физическому смыслу выражения (17.01), пропорционального квадрату бесконечно малой относительной скорости, оно является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца. Это можно проверить и непосредственно, подставив вместо величин v_x, v_y, v_z их выражение из (16.08) в виде дробно-линейных функций от v'_x, v'_y, v'_z: тогда ds^2 будет той же функцией от v'_x, v'_y, v'_z, dv'_x, dv'_y, dv'_z, как от v_x, v_y, v_z, dv_x, dv_y, dv_z.

Выражение (17.01) или (17.02) мы будем рассматривать, как квадрат элемента длины в некотором пространстве скоростей. Это есть то пространство, в котором строится в обычной механике годограф скоростей. Пространство это обладает всеми свойствами пространства Лобачевского, причем деленные на c составляющие скорости v_x, v_y, v_z являются в нем так называемыми координатами Бельтрами (см. книгу В. Ф. Кагана [9], формула CVIII на стр. 453). Свойства пространства Лобачевского могут быть выведены из рассмотрения выражения (17.01).

Кривая в пространстве Лобачевского может быть задана путем задания величин v_x, v_y, v_z как функций от некоторого параметра p. Если концам кривой соответствуют значения p_1 и p_2, то длина дуги кривой определится формулой

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{2F}\,dp, \tag{17.03}$$

где

$$F = \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c^2 - v^2} + \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{(c^2 - v^2)^2}, \tag{17.04}$$

причем точкой обозначены производные по параметру p. Найдем уравнения прямой Лобачевского, т. е. кратчайшей кривой, соединяющей точки p_1, p_2. Для этого нужно приравнять нулю вариацию интеграла (17.03), т. е. составить уравнения Лагранжа с функцией Лагранжа

$$L = \sqrt{2F}. \tag{17.05}$$

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_x} - \frac{\partial L}{\partial v_x} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{17.06}$$

или

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\sqrt{2F}}\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x}\right) - \frac{1}{\sqrt{2F}}\frac{\partial F}{\partial v_x} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{17.07}$$

Параметр p оставался до сих пор произвольным. Мы его выберем так, чтобы было

$$\frac{dF}{dp} = 0, \qquad F = \text{const}. \tag{17.08}$$

При таком выборе параметра p уравнения (17.07) будут равносильны следующим:

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} - \frac{\partial F}{\partial v_x} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{17.09}$$

Так как функция F не содержит явно параметра p, то будет

$$\dot{v}_x\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} + \dot{v}_y\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_y} + \dot{v}_z\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_z} - F = \text{const}, \tag{17.10}$$

т. е. величина (17.10) будет интегралом уравнений Лагранжа. Но F есть однородная квадратичная функция от $\dot{v}_x$, $\dot{v}_y$, $\dot{v}_z$; поэтому величина (17.10) равна F и, следовательно, условие (17.08) будет следствием уравнений (17.09).

Выпишем уравнения (17.09) подробнее и найдем их интегралы. Мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = \frac{\dot{v}_x}{c^2 - v^2} + v_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{(c^2 - v^2)^2}, \tag{17.11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = v_x \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{2 (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{(c^2 - v^2)^3} \right) + \dot{v}_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17.12}$$

Введем вектор $\mathbf{w}$ с составляющими

$$w_x = \frac{\dot{v}_x}{c^2 - v^2}; \quad w_y = \frac{\dot{v}_y}{c^2 - v^2}; \quad w_z = \frac{\dot{v}_z}{c^2 - v^2}. \tag{17.13}$$

Формулы (17.11) и (17.12) напишутся тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = w_x + v_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c^2 - v^2}; \tag{17.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = v_x \left(w^2 + 2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{c^2 - v^2} \right) + w_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}). \tag{17.15}$$

Дифференцируя (17.14) по параметру p и выражая $\dot{\mathbf{v}}$ через $\mathbf{w}$, получим

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = \dot{w}_x + v_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}})}{c^2 - v^2} + v_x \left(w^2 + 2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{c^2 - v^2} \right) + w_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}). \tag{17.16}$$

Подставляя (17.15) и (17.16) в уравнение Лагранжа (17.09), убедимся, что они приводятся к виду

$$\dot{w}_x + v_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}})}{c^2 - v^2} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{17.17}$$

Легко видеть, что алгебраическим следствием трех уравнений (17.17) является равенство $(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}}) = 0$, из которого следует, что уравнения (17.17) равносильны следующим:

$$\dot{w}_x = 0, \quad \dot{w}_y = 0, \quad \dot{w}_z = 0, \tag{17.18}$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{w}} = 0. \tag{17.19}$$

Таким образом, уравнения Лагранжа приводятся к требованию постоянства вектора $\mathbf{w}$, определяемого формулами (17.13). Но если вектор $\mathbf{w}$, пропорциональный $\dot{\mathbf{v}}$, постоянен, то будет постоянно и векторное произведение

$$[\mathbf{w} \times \mathbf{v}] = \text{const}. \tag{17.20}$$

Это дает еще два линейно-независимых интеграла уравнений Лагранжа.

Из найденных интегралов следует, что уравнения прямой Лобачевского в пространстве скоростей имеют вид *линейных* соотношений между составляющими скорости v_x, v_y, v_z. Мы знаем, что преобразование Лоренца соответствует дробно-линейной подстановке между составляющими скорости. Поэтому очевидно, что после преобразования линейные соотношения остаются линейными.

Определим длину отрезка прямой Лобачевского, соединяющей две точки $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$, и найдем связь между этой длиной и относительной скоростью тел, движущихся со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Так как координаты точек на отрезке связаны линейными соотношениями, то их можно представить параметрически в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \qquad (0 \leqslant \mu \leqslant 1). \tag{17.21}$$

Подставляя это значение $\mathbf{v}$ в (17.04), получим

$$2F = \frac{c^2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}{(c^2 - v^2)^2}\, \dot{\mu}^2. \tag{17.22}$$

Полагая для краткости

$$a = \sqrt{c^2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}, \tag{17.23}$$

мы получим по формуле (17.03) следующее выражение для длины отрезка:

$$s = \int_0^1 \frac{a\, d\mu}{c^2 - v^2}. \tag{17.24}$$

Этот интеграл проще всего вычисляется при помощи подстановки

$$\mu = \frac{(c^2 - v_1^2)\,\xi}{c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - v_1^2)\,\xi}, \tag{17.25}$$

которая дает

$$s = \int_0^1 \frac{ab\, d\xi}{b^2 - a^2\xi^2} = \frac{1}{2} \lg \frac{b + a}{b - a}, \tag{17.26}$$

где

$$b = c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2. \tag{17.27}$$

Коэффициенты в подстановке (17.25) подобраны так, чтобы пределы по ξ были 0 и 1 и чтобы знаменатель в (17.26) не содержал первой степени ξ. Отсюда получаем

$$\frac{a}{b} = \operatorname{th} s, \tag{17.28}$$

что после возведения в квадрат и умножения на c^2 можно написать в виде

$$\frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}\right)^2} = c^2 \operatorname{th}^2 s. \tag{17.29}$$

Сравнивая эту формулу с (16.10), мы убеждаемся, что слева в ней стоит квадрат относительной скорости. Таким образом, относительная скорость $\mathbf{v}'$ связана с длиной s отрезка прямой Лобачевского соотношением

$$|\mathbf{v}'| = c \operatorname{th} s. \tag{17.30}$$

Предположим, что скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ одинаково направлены. Сопоставляя их абсолютным величинам отрезков прямой Лобачевского, положим

$$v_1 = c \operatorname{th} s_1; \qquad v_2 = c \operatorname{th} s_2. \tag{17.31}$$

Отрезок прямой Лобачевского, соответствующий относительной скорости, будет равен разности отрезков s_2 и s_1. Поэтому относительная скорость будет равна

$$v' = c \operatorname{th}(s_2 - s_1) = c \frac{\operatorname{th} s_2 - \operatorname{th} s_1}{1 - \operatorname{th} s_2 \operatorname{th} s_1} \tag{17.32}$$

или

$$v' = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}}. \tag{17.33}$$

Это есть эйнштейнова формула сложения (в нашем случае — вычитания) скоростей.

Рассмотрим теперь угол между относительными скоростями двух тел. Если скорости берутся относительно точки, принимаемой за неподвижную, то косинус угла определяется по обычной формуле

$$\cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{|v_1| \cdot |v_2|}. \tag{17.34}$$

Но если скорости берутся относительно точки, которая сама движется со скоростью $\mathbf{u}$, то угол между относительными скоростями определится по более сложной формуле, которую легко получить из следующих соображений. Произведем преобразование Лоренца, после которого точка, двигавшаяся со скоростью $\mathbf{u}$, может рассматриваться как неподвижная, и применим затем обычную формулу (17.34). Мы получим тогда

$$\cos\alpha = \cos(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2') = \frac{\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'}{|v_1'| \cdot |v_2'|}, \tag{17.35}$$

где $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ — скорости тел после преобразования Лоренца [эти скорости получаются из (16.07) после замены $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}_1$ и на $\mathbf{v}_2$]. Выразив $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, мы получим после несложных выкладок

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_1\times\mathbf{u}][\mathbf{v}_2\times\mathbf{u}]}{\sqrt{(\mathbf{v}_1-\mathbf{u})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_1\times\mathbf{u}]^2}\cdot\sqrt{(\mathbf{v}_2-\mathbf{u})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_2\times\mathbf{u}]^2}}. \quad (17.36)$$

Но это есть выражение для косинуса угла треугольника в пространстве Лобачевского (угол при вершине $\mathbf{u}$ в треугольнике с вершинами в точках $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$).

В самом деле, наше исходное выражение (17.01) для квадрата элемента длины в пространстве Лобачевского имеет вид

$$ds^2 = \frac{c^2(d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v}\times d\mathbf{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}. \quad (17.37)$$

Это выражение соответствует „смещению“ $d\mathbf{v}$, исходящему из „точки“ $\mathbf{v}$. Для смещения $\delta\mathbf{v}$, исходящего из той же точки, мы имеем

$$\delta s^2 = \frac{c^2(\delta\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v}\times\delta\mathbf{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}. \quad (17.38)$$

Косинус угла между смещениями мы можем определить инвариантным образом по формуле

$$ds\,\delta s\cos\alpha = \frac{c^2 d\mathbf{v}\,\delta\mathbf{v} - [\mathbf{v}\times d\mathbf{v}][\mathbf{v}\times\delta\mathbf{v}]}{(c^2 - v^2)^2} \quad (17.39)$$

(эту формулу можно рассматривать, как определение угла в геометрии Лобачевского). Если мы теперь будем в (17.36) писать $\mathbf{v}$ вместо $\mathbf{u}$ и рассмотрим смещения

$$d\mathbf{v} = \varepsilon\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}); \qquad \delta\mathbf{v} = \eta\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}) \quad (17.40)$$

вдоль двух сторон треугольника, исходящих из вершины $\mathbf{v}$, то получаемое из (17.39) выражение для $\cos\alpha$ совпадет с (17.36).

Таким образом, угол между относительными скоростями можно рассматривать как угол в треугольнике Лобачевского. Если имеются три тела, движущихся со скоростями $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, то соответствующий треугольник будет иметь вершины в точках $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, причем относительные скорости будут соответствовать сторонам треугольника и углы между ними будут равны углам треугольника. Такое построение можно сделать и в нерелятивистской кинематике, но там геометрия пространства скоростей будет евклидовой, тогда как в теории относительности геометрия этого пространства будет геометрией Лобачевского.

Справедливость геометрии Лобачевского в пространстве скоростей может быть проверена на опыте. Мы имеем в виду опыт Физо по определению скорости света в движущейся среде и явление астрономической аберрации, открытое Брадлеем.

Опыт Физо имеет целью сравнение скорости распространения света в неподвижной и в движущейся среде. Распространение света в среде является некоторым сложным процессом, в котором принимают участие входящие в состав среды заряды и которому можно приписать скорость $\frac{c}{n}$, где n — показатель преломления среды. Если сама среда движется в направлении распространения света со скоростью v, то $w=\frac{c}{n}$ будет скоростью распространения света относительно среды. Скорость же w' относительно неподвижной системы отсчета получится по формуле Эйнштейна

$$w'=\frac{w+v}{1+\frac{w\cdot v}{c^2}}. \tag{17.41}$$

Подставляя сюда $w=\frac{c}{n}$ и сохраняя члены первого и нулевого порядка относительно c, мы получим

$$w'=\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=w+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right). \tag{17.42}$$

Множитель при v носит название коэффициента увлечения Френеля.

То обстоятельство, что этот множитель отличен от единицы, показывает, что при сложении скоростей нужно пользоваться именно эйнштейновой теоремой сложения, соответствующей геометрии Лобачевского, а не дорелятивистской формулой, соответствующей геометрии Евклида.

Явление астрономической аберрации состоит в принципе в том, что в двух движущихся друг относительно друга системах отсчета направления на одну и ту же звезду оказываются не совпадающими, а отличаются друг от друга на величину аберрации. Чтобы найти эту величину, нужно построить треугольник Лобачевского с вершинами в точках $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{a}c$, где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости тел, с которыми связаны обе системы отсчета, а вектор $\mathbf{a}$ есть единичный вектор в направлении световой волны, идущей от звезды. В треугольнике $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ угол при вершине $\mathbf{v}_3$ будет равен нулю [см. ниже формулу (17.44)], сумма же углов при вершинах $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ будет меньше двух прямых на величину аберрации (если бы треугольник был евклидов, то эта сумма равнялась бы двум прямым).

Соответствующий тригонометрический расчет легко произвести на основании формулы

$$\cos\alpha_1=\frac{(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1)-\frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_1][\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1]}{\sqrt{(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2-\frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_1]^2}\cdot\sqrt{(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1)^2-\frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1]^2}} \tag{17.43}$$

и двух других формул, получаемых из (17.43) круговой перестановкой значков 1, 2, 3.

Прежде всего, так как $v_3^2 = c^2$, то

$$\cos \alpha_3 = 1; \qquad \alpha_3 = 0. \tag{17.44}$$

Выберем систему отсчета так, чтобы было

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 0, \tag{17.45}$$

и положим

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v; \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_1 = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_2 = v \cos \beta. \tag{17.46}$$

Относительная скорость двух систем отсчета будет

$$v_{12} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}. \tag{17.47}$$

По формуле (17.43) получаем

$$\cos \alpha_1 = \frac{v - c \cos \beta}{c - v \cos \beta}; \qquad \sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{c^2 - v^2} \sin \beta}{c - v \cos \beta} \tag{17.48}$$

и аналогично

$$\cos \alpha_2 = \frac{v + c \cos \beta}{c + v \cos \beta}; \qquad \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{c^2 - v^2} \sin \beta}{c + v \cos \beta}. \tag{17.49}$$

Обозначая через δ величину аберрации, мы можем написать

$$\delta = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2. \tag{17.50}$$

Предыдущие формулы дают

$$2 \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2v^2 \sin^2 \beta}{c^2 - v^2 \cos^2 \beta}, \tag{17.51}$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{v \sin \beta}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{17.52}$$

В астрономических наблюдениях сравниваются видимые положения звезды при различных направлениях скорости движения Земли по орбите (годичная аберрация). Так как во все рассуждения входят только относительные скорости тел, воспринимающих луч, идущий от звезды, то очевидно, что общее движение Солнечной системы относительно звезд не играет роли, если только скорость его за рассматриваемые промежутки времени постоянна. Поэтому по величине аберрации нельзя определить скорость звезды относительно Земли или Солнца.