ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ТЕНЗОРНОЙ ФОРМЕ

§ 18. Замечание о ковариантности уравнений

При обсуждении в § 6 основных положений теории относительности мы установили некоторые общие требования, которым должна удовлетворять форма уравнений, определяющих ход физических процессов. Мы имеем в виду те уравнения, вид которых не зависит от начальных условий. Требования эти определяют правила преобразования уравнений при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Согласно принципу относительности, правила преобразования независимых переменных и неизвестных функций в этих уравнениях должны быть таковы, чтобы уравнения, написанные в одной инерциальной системе отсчета, были эквивалентны уравнениям *того же вида*, написанным в любой другой.

Это требование уже применялось нами при выводе преобразования Лоренца. В самом деле, мы получили это преобразование из условия, чтобы уравнение распространения фронта волны

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]=0 \tag{18.01}$$

сохраняло свой вид, в соединении с условием, чтобы прямолинейное и равномерное движение оставалось таковым и после перехода к другой системе отсчета.

Таким образом, указанное требование уже определило правило преобразования независимых переменных (координат и времени).

Необходимо рассмотреть еще правила преобразования неизвестных функций, входящих в уравнения.

Простейшим правилом преобразования является простая инвариантность. Например, в случае уравнения (18.01) неизвестной функцией является величина ω, входящая в уравнение фронта волны

$$\omega(x,\ y,\ z,\ t)=0. \tag{18.02}$$

Преобразованная функция ω', которая дает уравнение фронта волны в новых переменных

$$\omega'(x', y', z', t') = 0, \tag{18.03}$$

будет просто равна старой, и вид ее определяется из условия

$$\omega'(x', y', z', t') \equiv \omega(x, y, z, t). \tag{18.04}$$

Но в большинстве задач для сохранения вида уравнений необходимо сопровождать преобразование Лоренца для независимых переменных тем или иным преобразованием для неизвестных функций. Если существует такое преобразование для неизвестных функций, что новые функции, выраженные в новых переменных, будут удовлетворять уравнениям того же вида, как старые функции в старых переменных, то уравнения называются *ковариантными*.

Требование ковариантности уравнений по отношению к преобразованию Лоренца является обязательным следствием принципа относительности. С другой стороны, ясно, что не всякие уравнения будут ковариантными. Нам надлежит проверить, являются ли ковариантными уравнения, принятые в физике для описания того или иного физического процесса (например, уравнения электродинамики или уравнения механики), и если нет, то видоизменить их так, чтобы новые уравнения стали уже ковариантными.

Проверка ковариантности и составление ковариантных уравнений требуют предварительного изучения величин с наиболее простыми законами преобразования. При этом достаточно ограничиться линейными законами. Полная классификация величин по их закону преобразования составляет предмет одной из глав теории групп. Мы не можем рассматривать здесь этот вопрос во всей его общности, а ограничимся тем, что́ необходимо для формулировки основных уравнений механики и электродинамики.

§ 19. Определение тензора в трехмерном случае и замечание о ковариантных величинах

Формулы поворота пространственных координатных осей имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \\ x_k &= \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_i', \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, 3) \right\} \tag{19.01}$$

где α_{ik} — косинусы углов между старыми и новыми осями. Мы можем формально определить трехмерный вектор как такую совокупность