Преобразованная функция ω', которая дает уравнение фронта волны в новых переменных

$$\omega'(x', y', z', t') = 0, \tag{18.03}$$

будет просто равна старой, и вид ее определяется из условия

$$\omega'(x', y', z', t') \equiv \omega(x, y, z, t). \tag{18.04}$$

Но в большинстве задач для сохранения вида уравнений необходимо сопровождать преобразование Лоренца для независимых переменных тем или иным преобразованием для неизвестных функций. Если существует такое преобразование для неизвестных функций, что новые функции, выраженные в новых переменных, будут удовлетворять уравнениям того же вида, как старые функции в старых переменных, то уравнения называются *ковариантными*.

Требование ковариантности уравнений по отношению к преобразованию Лоренца является обязательным следствием принципа относительности. С другой стороны, ясно, что не всякие уравнения будут ковариантными. Нам надлежит проверить, являются ли ковариантными уравнения, принятые в физике для описания того или иного физического процесса (например, уравнения электродинамики или уравнения механики), и если нет, то видоизменить их так, чтобы новые уравнения стали уже ковариантными.

Проверка ковариантности и составление ковариантных уравнений требуют предварительного изучения величин с наиболее простыми законами преобразования. При этом достаточно ограничиться линейными законами. Полная классификация величин по их закону преобразования составляет предмет одной из глав теории групп. Мы не можем рассматривать здесь этот вопрос во всей его общности, а ограничимся тем, что̀ необходимо для формулировки основных уравнений механики и электродинамики.

§ 19. Определение тензора в трехмерном случае и замечание о ковариантных величинах

Формулы поворота пространственных координатных осей имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \\ x_k &= \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x'_i, \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3)\right\} \tag{19.01}$$

где α_{ik} — косинусы углов между старыми и новыми осями. Мы можем формально определить трехмерный вектор как такую совокупность величин (A_1, A_2, A_3) — его составляющих, которая при повороте осей преобразуется по закону

$$A'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} A_k. \tag{19.02}$$

Частным случаем вектора будет радиус-вектор, для которого $A_1 = x_1$, $A_2 = x_2$, $A_3 = x_3$.

Допустим теперь, что даны два вектора, причем их составляющие A_i и B_i связаны линейной зависимостью

$$B_i = \sum_{k=1}^{3} T_{ik} A_k. \tag{19.03}$$

После поворота осей новые составляющие векторов будут связаны аналогичной зависимостью

$$B'_i = \sum_{k=1}^{3} T'_{ik} A'_k, \tag{19.04}$$

причем

$$T'_{ik} = \sum_{j,\,l=1}^{3} \alpha_{ij} \alpha_{kl} T_{jl}. \tag{19.05}$$

В самом деле, для вектора B старые и новые составляющие должны быть связаны теми же формулами, как и для вектора A. Выражая по этим формулам B'_i через B_i и затем в (19.03) A_i — через A'_i, получим (19.04) и (19.05).

Совокупность величин T_{ik}, преобразующихся при повороте осей по закону (19.05), называется тензором, или, подробнее, тензором второго ранга (вообще, ранг тензора равен числу его значков).

Примеры тензоров встречаются уже в нерелятивистской механике. Так, составляющие момента количества движения твердого тела (B_i) связаны с составляющими его угловой скорости (A_i) соотношениями вида (19.03), где T_{ik} — тензор моментов инерции. Другой пример дает теория упругости: там такие же соотношения дают связь между составляющими (dF_x, dF_y, dF_z) силы, действующей на некоторую площадку, и проекциями (dS_x, dS_y, dS_z) этой площадки на координатные плоскости, причем коэффициенты T_{ik} представляют тензор напряжений. В обоих примерах тензор T_{ik} симметричен относительно своих значков, но встречаются и тензоры, которые этим свойством не обладают.

Из формулы (19.05) видно, что составляющие тензора преобразуются, как произведения $x_i \xi_k$ координат двух точек (x_1, x_2, x_3) и (ξ_1, ξ_2, ξ_3), которые могут и совпадать $(x_i = \xi_i)$.

Рассмотрим антисимметричный тензор, т. е. такой, составляющие которого удовлетворяют соотношению

$$T_{ik} + T_{ki} = 0. \tag{19.06}$$

Примером такого тензора может служить антисимметричная комбинация произведений координат двух точек

$$T_{ik} = x_i \xi_k - \xi_i x_k. \tag{19.07}$$

Так как значки принимают у нас только три значения (1, 2, 3), то вместо двух значков мы можем писать один (дополнительный) значок и положить

$$\left.\begin{aligned} T_{23} &= -T_{32} = T_1, \\ T_{31} &= -T_{13} = T_2, \\ T_{12} &= -T_{21} = T_3. \end{aligned}\right\} \tag{19.08}$$

В общем виде, если (i, k, l) есть четная перестановка значков (1, 2, 3), мы будем иметь

$$T_{ik} = T_l. \tag{19.09}$$

Используя антисимметрию тензора T_{ik}, мы можем вместо (19.05) написать:

$$T'_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{p,\, q=1}^{3} (\alpha_{ip}\alpha_{kq} - \alpha_{iq}\alpha_{kp}) T_{pq}. \tag{19.10}$$

В этой сумме из девяти членов три (для $p = q$) равны нулю, а остальные шесть попарно равны друг другу, так что фактически имеются три различных члена.

Пусть теперь (i, k, l) и (p, q, r) — четные перестановки чисел (1, 2, 3). Используя обозначения (19.09) и полагая

$$\alpha_{ip}\alpha_{kq} - \alpha_{iq}\alpha_{kp} = \beta_{lr}, \tag{19.11}$$

мы можем переписать формулу (19.10) в виде

$$T'_l = \sum_{r=1}^{3} \beta_{lr} T_r. \tag{19.12}$$

Рассмотрим теперь определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \tag{19.13}$$

По свойству ортогонального преобразования $\Delta^2 = 1$, причем, если это преобразование есть простой поворот осей, то $\Delta = +1$, а если поворот сопровождается отражением (изменением знака одной или всех трех координат), то $\Delta = -1$. В обоих случаях

$$\beta_{lr} = \Delta \cdot \alpha_{lr}. \tag{19.14}$$

Таким образом, для простого поворота осей мы имеем

$$T'_l = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{lr} T_r, \tag{19.15}$$

а для несобственного ортогонального преобразования (поворот с отражением)

$$T'_l = -\sum_{r=1}^{3} \alpha_{lr} T_r. \tag{19.16}$$

Формула (19.16) показывает, что при простом повороте осей совокупность величин (19.08) преобразуется как вектор, а при повороте с отражением преобразование, подобное векторному, сопровождается изменением знака всех составляющих. Совокупность величин с таким законом преобразования принято называть *аксиальным* вектором, в отличие от *полярного* вектора, который во всех случаях преобразуется по формуле (19.02). Легко видеть, что векторное произведение двух полярных векторов будет аксиальным вектором. Физическим примером полярного вектора может служить вектор электрического поля, а аксиального — вектор магнитного поля (то и другое — в смысле трехмерного векторного исчисления). Формулы (19.08) показывают, что аксиальный вектор является по существу тензором второго ранга; поэтому, если пользоваться терминами „вектор" и „тензор" в смысле определений (19.02) и (19.05), то без термина „аксиальный вектор" можно обойтись.

Аналогично можно определить, в трехмерном евклидовом пространстве, тензор более высокого ранга. Так, например, тензором третьего ранга будет совокупность величин T_{ijk}, преобразующихся при повороте осей по закону

$$T'_{ijk} = \sum_{l,\,m,\,n=1}^{3} \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn} T_{lmn}. \tag{19.17}$$

С другой стороны, величину, которая не меняется при повороте осей, можно также рассматривать как тензор, а именно как тензор нулевого ранга. Такую величину принято называть *скаляром* или инвариантом.

Если дан тензор второго ранга, то можно составить такую комбинацию его составляющих, которая не меняется при повороте осей, т. е. ведет себя, как скаляр. Такой линейной комбинацией является сумма диагональных элементов тензора второго ранга, т. е. величина

$$T = \sum_i T_{ii}. \tag{19.18}$$

Используя свойство

$$\sum_j \alpha_{ji}\alpha_{il} = \delta_{jl} \tag{19.19}$$

коэффициентов ортогонального преобразования, легко проверить, что из (19.05) вытекает

$$T' = T, \tag{19.20}$$

т. е. что T есть скаляр. Подобно этому, из составляющих тензора третьего ранга можно составить три вектора:

$$A_l = \sum_m T_{lmm}; \quad B_l = \sum_m T_{mlm}; \quad C_l = \sum_m T_{mml}. \tag{19.21}$$

Можно поставить себе вопрос: нельзя ли, вместо тензоров, ввести другие величины разных рангов, но так, чтобы из составляющих данного ранга уже нельзя было образовать таких линейных комбинаций, которые преобразовывались бы, как величины более низкого ранга.

Такие величины действительно можно построить. Закон преобразования для них будет тот же, как для гармонических полиномов, связанных с обыкновенными шаровыми функциями. Напомним, что если ввести сферические координаты

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi; \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi; \quad z = \cos\vartheta,$$

то умноженная на r^l шаровая функция порядка l будет гармоническим полиномом от x, y, z:

$$r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_{lm}(x, y, z).$$

Порядок l будет соответствовать рангу тензора, но число составляющих данного ранга будет меньше, чем у тензора. После поворота осей гармонический полином $P_{lm}(x', y', z')$ выразится, как линейная комбинация полиномов $P_{lm}(x, y, z)$, соответствующих различным m $(m = -l, \ -l+1, \ \ldots, \ l)$ по одному и тому же l. Коэффициенты этого линейного преобразования и будут характеризовать закон преобразования величин ранга l.

Обратим, наконец, внимание на следующее обстоятельство. В наших рассуждениях мы предполагали, что тензоры (или аналогичные им величины) являются, по их физическому смыслу, величинами вполне определенными, включая их знак. Сообразно этому, коэффициенты в формулах преобразования были у нас однозначными функциями от косинусов α_{ik}. Но можно себе представить и такие величины, которые являются определенными лишь с точностью до знака (вполне определенными будут тогда их квадратичные комбинации). В таком случае необязательно ограничиваться преобразованиями, коэффициенты которых однозначно определяются через α, а можно ввести и коэффициенты, определяемые лишь с точностью до знака (одного и того же во всех коэффициентах). Это приводит к новой категории физических величин — к так называемым спинорам, и к соответствующему обобщению шаровых функций с их законом преобразования. Такие величины применяются в квантовой механике.

Таким образом, тензоры не являются единственными геометрическими величинами с определенным законом преобразования. Однако в обычных (не-квантовых) применениях теории относительности можно ограничиться рассмотрением тензоров.

§ 20. Определение четырехмерного вектора

В предыдущем параграфе мы напомнили определение тензора в трехмерном евклидовом пространстве. Нам нужно теперь обобщить это определение на четырехмерное многообразие пространства и времени. Роль поворота осей будет играть теперь преобразование Лоренца. Существенно новым моментом будет различие в знаках пространственных и временных членов выражения

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{20.01}$$

для квадрата бесконечно малого четырехмерного интервала. Инвариантность выражения (20.01) характеризует, как мы видели, преобразование Лоренца, подобно тому, как инвариантность выражения

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{20.02}$$

характеризует поворот пространственных осей.

Указанное различие в знаках весьма важно для всей теории, так как оно отражает существующее коренное различие между пространством и временем.

Можно было бы, путем введения мнимых величин (мнимых координат или мнимого времени), добиться того, чтобы квадраты всех дифференциалов входили в ds^2 с одинаковым знаком. Этот путь был указан Минковским, а также Умовым. Однако достигаемая таким путем симметрия формул относительно пространства и времени не является, по нашему мнению, целесообразной, так как она затушевывает существующее между пространством и временем различие и не несет с собой особых математических преимуществ. Поэтому мы будем в дальнейшем оперировать с вещественными координатами и вещественным временем.

Если мы положим

$$ct = x_0; \qquad x = x_1; \qquad y = x_2; \qquad z = x_3, \tag{20.03}$$

то выражение для ds^2 примет вид

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,dx_k^2, \tag{20.04}$$