законом преобразования. Такие величины применяются в квантовой механике.

Таким образом, тензоры не являются единственными геометрическими величинами с определенным законом преобразования. Однако в обычных (не-квантовых) применениях теории относительности можно ограничиться рассмотрением тензоров.

§ 20. Определение четырехмерного вектора

В предыдущем параграфе мы напомнили определение тензора в трехмерном евклидовом пространстве. Нам нужно теперь обобщить это определение на четырехмерное многообразие пространства и времени. Роль поворота осей будет играть теперь преобразование Лоренца. Существенно новым моментом будет различие в знаках пространственных и временных членов выражения

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{20.01}$$

для квадрата бесконечно малого четырехмерного интервала. Инвариантность выражения (20.01) характеризует, как мы видели, преобразование Лоренца, подобно тому, как инвариантность выражения

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{20.02}$$

характеризует поворот пространственных осей.

Указанное различие в знаках весьма важно для всей теории, так как оно отражает существующее коренное различие между пространством и временем.

Можно было бы, путем введения мнимых величин (мнимых координат или мнимого времени), добиться того, чтобы квадраты всех дифференциалов входили в ds^2 с одинаковым знаком. Этот путь был указан Минковским, а также Умовым. Однако достигаемая таким путем симметрия формул относительно пространства и времени не является, по нашему мнению, целесообразной, так как она затушевывает существующее между пространством и временем различие и не несет с собой особых математических преимуществ. Поэтому мы будем в дальнейшем оперировать с вещественными координатами и вещественным временем.

Если мы положим

$$ct = x_0; \qquad x = x_1; \qquad y = x_2; \qquad z = x_3, \tag{20.03}$$

то выражение для ds^2 примет вид

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,dx_k^2, \tag{20.04}$$

где величины e_k равны ± 1 [см (8.25)]. Прямое и обратное преобразования Лоренца напишутся:

$$x'_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k, \tag{20.05}$$

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} x'_k. \tag{20.06}$$

Следовательно, дифференциалы старых и новых координат будут связаны соотношением

$$dx'_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik}\, dx_k, \tag{20.07}$$

а частные производные от какой-нибудь функции φ по старым и новым координатам будут связаны соотношением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} = \sum_{k=0}^{3} e_i a_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \tag{20.08}$$

Если бы квадратичная форма (20.04) была определенной, то все числа e_k были бы друг другу равны и коэффициенты в формулах (20.07) и (20.08) были бы одинаковы. На самом же деле мы имеем

$$e_0 = 1; \qquad e_1 = e_2 = e_3 = -1 \tag{20.09}$$

и некоторые из соответствующих коэффициентов в этих формулах отличаются друг от друга знаком. Поэтому закон преобразования дифференциалов координат уже не будет (как это имело место для чисто пространственных вращений) совпадать с законом преобразования частных производных по координатам. Это необходимо учесть при определении вектора. Мы должны различать такие векторы, которые преобразуются как частные производные по координатам, от таких, которые преобразуются как дифференциалы координат. Первые мы будем называть *ковариантными*, а вторые — *контравариантными*. Составляющие ковариантного вектора мы будем обозначать буквами с *нижними* значками, а составляющие контравариантного вектора — теми же буквами с *верхними* значками. Таким образом, закон преобразования вектора будет иметь вид

$$A'_i = \sum_{k=0}^{3} e_i a_{ik} A_k \tag{20.10}$$

для ковариантного вектора и

$$A'^i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} A^k \tag{20.11}$$

для контравариантного вектора. Эти формулы можно записать в виде

$$A'_i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} A_k \tag{20.12}$$

$$A'^i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} A^k. \tag{20.13}$$

Заметим здесь же, что из правила относительно расположения значков (верхние и нижние значки) делают исключение в случае координат и их дифференциалов: согласно общему правилу, мы должны были бы писать $(dx)^0$, $(dx)^1$, $(dx)^2$, $(dx)^3$, а не dx_0, dx_1, dx_2, dx_3, как это принято.

Если задан ковариантный вектор A_i, то мы всегда можем ввести соответствующий ему контравариантный вектор, положив

$$A^i = e_i A_i. \tag{20.14}$$

Оба вектора не будут существенно различными, и мы будем говорить не о двух векторах, а о ковариантных и контравариантных составляющих одного и того же вектора.

Скалярное произведение двух векторов A_i и B_i определится как сумма

$$\sum_{i=0}^{3} e_i A_i B_i = \sum_{i=0}^{3} e_i A^i B^i, \tag{20.15}$$

которую можно также написать в виде

$$\sum_{i=0}^{3} A_i B^i = \sum_{i=0}^{3} A^i B_i. \tag{20.16}$$

Эта величина будет инвариантной по отношению к преобразованию Лоренца.

Скалярное произведение вектора на самого себя

$$\sum_{i=0}^{3} A_i A^i = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2 \tag{20.17}$$

может быть величиной как положительной, так и отрицательной. Про вектор, для которого величина (20.17) положительна, говорят, что он имеет характер времени; вектор, для которого эта величина отрицательна, называют имеющим пространственный характер. Наряду с этими терминами употребительны также термины „временно-подобный“ и „пространственно-подобный“ вектор.

Примером временно-подобного вектора может служить четырехмерная скорость, составляющие которой определяются равенствами

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{20.18}$$

То, что совокупность величин (20.18) есть вектор, вытекает из следующих соображений. Мы знаем, что величина

$$c\,d\tau = ds = \sqrt{c^2 - v^2}\,dt \tag{20.19}$$

есть инвариант. С другой стороны, величины (20.18) могут быть написаны в виде

$$u^0 = c\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx_0}{d\tau}; \qquad u^i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad (i = 1;\ 2,\ 3). \tag{20.20}$$

Отсюда ясно, что величины u^0, u^1, u^2, u^3 преобразуются, как дифференциалы координат x_0, x_1, x_2, x_3, т. е. как контравариантный вектор. То, что этот вектор временно-подобен, вытекает из тождества

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = c^2. \tag{20.21}$$

Примером пространственно-подобного вектора может служить четырехмерный вектор ускорения, составляющие которого определяются по формулам

$$w^0 = \frac{du^0}{d\tau}; \qquad w^i = \frac{du^i}{d\tau} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{20.22}$$

или подробнее:

$$\left.\begin{aligned} w^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right), \\ w^i &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt}\right) \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{20.23}$$

Пространственный характер вектора w может быть доказан следующим образом. Дифференцируя тождество (20.21) по времени (или по τ) получаем

$$u^0w^0 - u^1w^1 - u^2w^2 - u^3w^3 = 0 \tag{20.24}$$

или

$$cw^0 - v_1w^1 - v_2w^2 - v_3w^3 = 0. \tag{20.25}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$(w^0)^2 < \frac{v^2}{c^2}\left((w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2\right) < (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2, \tag{20.26}$$

которое и доказывает наше утверждение о пространственном характере вектора w.

§ 21. Четырехмерные тензоры

Подобно трехмерному случаю, в четырехмерном многообразии пространства и времени могут быть определены тензоры второго и высшего ранга.