То, что совокупность величин (20.18) есть вектор, вытекает из следующих соображений. Мы знаем, что величина

$$c\,d\tau = ds = \sqrt{c^2 - v^2}\,dt \tag{20.19}$$

есть инвариант. С другой стороны, величины (20.18) могут быть написаны в виде

$$u^0 = c\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx_0}{d\tau}; \quad u^i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad (i = 1;\ 2,\ 3). \tag{20.20}$$

Отсюда ясно, что величины u^0, u^1, u^2, u^3 преобразуются, как дифференциалы координат x_0, x_1, x_2, x_3, т. е. как контравариантный вектор. То, что этот вектор временно-подобен, вытекает из тождества

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = c^2. \tag{20.21}$$

Примером пространственно-подобного вектора может служить четырехмерный вектор ускорения, составляющие которого определяются по формулам

$$w^0 = \frac{du^0}{d\tau}; \quad w^i = \frac{du^i}{d\tau} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{20.22}$$

или подробнее:

$$\left.\begin{aligned} w^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),\\ w^i &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt}\right) \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{20.23}$$

Пространственный характер вектора w может быть доказан следующим образом. Дифференцируя тождество (20.21) по времени (или по τ) получаем

$$u^0w^0 - u^1w^1 - u^2w^2 - u^3w^3 = 0 \tag{20.24}$$

или

$$cw^0 - v_1w^1 - v_2w^2 - v_3w^3 = 0. \tag{20.25}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$(w^0)^2 < \frac{v^2}{c^2}\left((w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2\right) < (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2, \tag{20.26}$$

которое и доказывает наше утверждение о пространственном характере вектора w.

§ 21. Четырехмерные тензоры

Подобно трехмерному случаю, в четырехмерном многообразии пространства и времени могут быть определены тензоры второго и высшего ранга.

Ковариантным тензором второго ранга называется совокупность величин T_{ik}, которые при преобразовании Лоренца преобразуются по закону

$$T'_{ik} = \sum_{j,\,l=0}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} T_{jl} \tag{21.01}$$

или

$$T'_{ik} = \sum_{j,\,l=0}^{3} e_i e_k a_{ij} a_{kl} T_{jl}. \tag{21.02}$$

Аналогично, контравариантным тензором второго ранга будет совокупность величин, преобразующихся по закону

$$T'^{ik} = \sum_{j,\,l=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} T^{jl} \tag{21.03}$$

или

$$T'^{ik} = \sum_{j,\,l=0}^{3} e_j e_l a_{ij} a_{kl} T^{jl}. \tag{21.04}$$

Наконец, можно определить смешанный тензор второго ранга, ковариантный по отношению к одному значку и контравариантный по отношению к другому. Его составляющие преобразуются по закону

$$T'^{i}_{k} = \sum_{j,\,l=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} T^{j}_{l} \tag{21.05}$$

или

$$T'^{i}_{k} = \sum_{j,\,l=0}^{3} e_j e_k a_{ij} a_{kl} T^{j}_{l}. \tag{21.06}$$

Если бы все числа e_i были друг другу равны, то коэффициенты в формулах (21.02), (21.04), (21.06) совпадали бы. В нашем же случае некоторые из этих коэффициентов отличаются друг от друга знаком.

Формулы преобразования (21.02), (21.04), (21.06) не являются существенно различными, и от величин, преобразующихся по одной из этих формул, можно перейти к величинам, преобразующимся по какой-нибудь другой из них. Для этого достаточно положить

$$T^{ik} = e_i e_k T_{ik}, \tag{21.07}$$

а в качестве T^{i}_{k} ввести одну из двух величин:

$$T^{i\cdot}_{\cdot k} = e_i T_{ik} \tag{21.08}$$

или

$$T^{\cdot i}_{k\cdot} = e_i T_{ki}. \tag{21.09}$$

Если тензор T_{ik} симметричен, то величины (21.08) и (21.09) будут совпадать. Как и в случае вектора, мы будем говорить не о разных тензорах, а о ковариантных, контравариантных и смешанных составляющих одного и того же тензора.

Аналогично можно ввести тензоры третьего и высшего рангов. Так, например, тензор третьего ранга с тремя ковариантными значками преобразуется по закону

$$T'_{ikm} = \sum_{j,\,l,\,n=0}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \frac{\partial x_n}{\partial x'_m} T_{jln} \tag{21.10}$$

или

$$T'_{ikm} = \sum_{j,\,l,\,n=0}^{3} e_i e_k e_m a_{ij} a_{kl} a_{mn} T_{jln}. \tag{21.11}$$

Как и в трехмерном случае, из составляющих тензора второго ранга можно образовать скаляр

$$T = \sum_{i=0}^{3} e_i T_{ii}, \tag{21.12}$$

а из составляющих тензора третьего ранга — три вектора:

$$A_i = \sum_k e_k T_{ikk}; \quad B_i = \sum_k e_k T_{kik}; \quad C_i = \sum_k e_k T_{kki}. \tag{21.13}$$

На затронутом в конце § 19 вопросе о не-тензорных величинах с простейшими (в известном смысле) законами преобразования мы здесь останавливаться не будем ввиду того, что в основных не-квантовых применениях теории относительности главную роль играют тензоры.

Если даны два тензора, то из них можно построить новые тензоры, ранг которых равен сумме или разности рангов данных тензоров (а также тензоры промежуточных рангов одной четности с суммой или разностью). Поясним это на примерах. В § 20 мы видели, что из двух векторов A_i и B_i можно составить скаляр

$$C = \sum_{i=0}^{3} e_i A_i B_i. \tag{21.14}$$

Здесь векторы рассматриваются как тензоры первого ранга, а скаляр — как тензор нулевого ранга. С другой стороны, из тех же векторов можно составить тензор второго ранга

$$C_{ik} = A_i B_k \quad \text{или же} \quad C_{ik} = B_i A_k. \tag{21.15}$$

Если дан тензор второго ранга T_{ik} и вектор A_i, то величина

$$B_i = \sum_k e_k A_k T_{ik} \tag{21.16}$$

будет вектором, а величина

$$C_{ikl} = A_i T_{kl} \tag{21.17}$$

[и другие, отличающиеся от (21.17) перестановкой значков в правой части] будет тензором третьего ранга.

В качестве дальнейшего примера составим из двух заданных тензоров второго ранга T_{ik} и U_{ik} скаляр

$$C = \sum_{i,k=0}^{3} e_i e_k T_{ik} U_{ik}, \tag{21.18}$$

тензор второго ранга

$$C_{ik} = \sum_m e_m T_{im} U_{km} \tag{21.19}$$

и тензор четвертого ранга

$$C_{iklm} = T_{ik} U_{lm}. \tag{21.20}$$

В этом случае, очевидно, будет

$$C_{ik} = \sum_m e_m C_{imkm}, \tag{21.21}$$

$$C = \sum_i e_i C_{ii}. \tag{21.22}$$

Тензорный характер всех этих величин легко проверяется на основании равенств (10.04) и (10.05), выражающих свойства коэффициентов преобразования Лоренца.

Заметим, что во всех суммах, содержащих произведения ковариантных составляющих тензоров, эти произведения входят умноженными на добавочный (знаковый) множитель e_i, e_k, ..., где i, k, ... — значки суммирования. Но можно писать суммы так, чтобы значок суммирования входил в составляющую одного из тензоров в качестве ковариантного (нижнего) значка, а в умножаемую на нее составляющую другого тензора — в качестве контравариантного (верхнего) значка; тогда добавочный знаковый множитель входить не будет. Так, например, скалярное произведение (21.14) может быть написано в виде (10.16), а сумма (21.18), согласно (21.07), — в виде

$$C = \sum_{i,k=0}^{3} T^{ik} U_{ik}. \tag{21.23}$$

Из данного тензора можно получить новый не только путем умножения на другой тензор, но и путем дифференциальных операций. При этом операция дифференцирования по координате x_i играет роль умножения на ковариантную составляющую некоторого вектора. Так, например, величина

$$C = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial A^i}{\partial x_i} \tag{21.24}$$

есть скаляр, а совокупность величин

$$B_i = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{21.25}$$

есть вектор (расходимость тензора T_{ik}). В частности, если

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{21.26}$$

где φ — некоторый скаляр, то составленное по формуле (21.24) выражение

$$\Box \varphi = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \tag{21.27}$$

также будет скаляром (символ $\Box$ означает оператор Даламбера).

§ 22. Псевдо-тензоры

Наряду с тензорами удобно вводить в рассмотрение величины, закон преобразования которых зависит от знака определителя подстановки

$$D = \frac{D(x_0, x_1, x_2, x_3)}{D(x_0', x_1', x_2', x_3')} = \mathrm{Det}\,(e_i a_{ik}). \tag{22.01}$$

По свойству коэффициентов преобразования Лоренца квадрат определителя D всегда равен единице. Самый же определитель равен $D = \pm 1$ для собственных преобразований Лоренца (сохраняющих направление счета времени и переводящих правую систему пространственных осей в правую же систему) и равен $D = -1$ для несобственных преобразований. Хотя мы условились рассматривать лишь собственные преобразования Лоренца, для классификации геометрических величин полезно знать их поведение также и при несобственных преобразованиях.

Рассмотрим совокупность величин ε_{iklm}, антисимметричных относительно своих значков, причем $\varepsilon_{0123} = 1$. Из этого определения следует, что $\varepsilon_{iklm} = 0$, если два или больше значков совпадают, $\varepsilon_{iklm} = +1$, если $(iklm)$ представляет четную перестановку чисел (0123), и $\varepsilon_{iklm} = -1$, если $(iklm)$ есть нечетная перестановка.

Легко проверить тождество

$$\sum_{pqrs=0}^{3} \varepsilon_{pqrs} \frac{\partial x_p}{\partial x_i'} \frac{\partial x_q}{\partial x_k'} \frac{\partial x_r}{\partial x_l'} \frac{\partial x_s}{\partial x_m'} = D \cdot \varepsilon_{iklm}. \tag{22.02}$$