есть скаляр, а совокупность величин

$$B_i = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{21.25}$$

есть вектор (расходимость тензора T_{ik}). В частности, если

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{21.26}$$

где φ — некоторый скаляр, то составленное по формуле (21.24) выражение

$$\Box\varphi = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \tag{21.27}$$

также будет скаляром (символ $\Box$ означает оператор Даламбера).

§ 22. Псевдо-тензоры

Наряду с тензорами удобно вводить в рассмотрение величины, закон преобразования которых зависит от знака определителя подстановки

$$D = \frac{D(x_0, x_1, x_2, x_3)}{D(x_0', x_1', x_2', x_3')} = \mathrm{Det}\,(e_i a_{ik}). \tag{22.01}$$

По свойству коэффициентов преобразования Лоренца квадрат определителя D всегда равен единице. Самый же определитель равен $D = \pm 1$ для собственных преобразований Лоренца (сохраняющих направление счета времени и переводящих правую систему пространственных осей в правую же систему) и равен $D = -1$ для несобственных преобразований. Хотя мы условились рассматривать лишь собственные преобразования Лоренца, для классификации геометрических величин полезно знать их поведение также и при несобственных преобразованиях.

Рассмотрим совокупность величин ε_{iklm}, антисимметричных относительно своих значков, причем $\varepsilon_{0123} = 1$. Из этого определения следует, что $\varepsilon_{iklm} = 0$, если два или больше значков совпадают, $\varepsilon_{iklm} = +1$, если $(iklm)$ представляет четную перестановку чисел (0123), и $\varepsilon_{iklm} = -1$, если $(iklm)$ есть нечетная перестановка.

Легко проверить тождество

$$\sum_{pqrs=0}^{3} \varepsilon_{pqrs} \frac{\partial x_p}{\partial x_i'} \frac{\partial x_q}{\partial x_k'} \frac{\partial x_r}{\partial x_l'} \frac{\partial x_s}{\partial x_m'} = D \cdot \varepsilon_{iklm}. \tag{22.02}$$

В самом деле, левая часть представляет разложение определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x'_i} & \frac{\partial x_0}{\partial x'_k} & \frac{\partial x_0}{\partial x'_l} & \frac{\partial x_0}{\partial x'_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_3}{\partial x'_i} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_k} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_l} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_m} \end{vmatrix},$$

который получается из D перестановкой столбцов, если все значки $(iklm)$ различны, и который обращается в нуль, если некоторые из них совпадают.

Формула (22.02) показывает, что при $D=1$ величины ε преобразуются, как составляющие тензора, а при $D=-1$ закон преобразования этих величин отличается от закона преобразования тензора знаком. Совокупность величин с таким законом преобразования называется *псевдо-тензором.*

Мы можем рассматривать ε_{iklm}, как ковариантные составляющие антисимметричного псевдо-тензора четвертого ранга. Контравариантные составляющие этого тензора получатся по общей формуле

$$\varepsilon^{iklm} = e_i e_k e_l e_m \varepsilon_{iklm}. \qquad (22.03)$$

Но так как величины ε отличны от нуля только если все значки различны, а тогда $e_i e_k e_l e_m = e_0 e_1 e_2 e_3 = -1$, то будет просто

$$\varepsilon^{iklm} = -\varepsilon_{iklm}. \qquad (22.04)$$

Если φ есть скаляр, то совокупность величин

$$\varphi_{iklm} = \varphi\varepsilon_{iklm} \qquad (22.05)$$

будет антисимметричным псевдо-тензором четвертого ранга. Такой псевдо-тензор имеет, подобно скаляру, только одну составляющую; поэтому его принято называть псевдо-скаляром.

Всякому антисимметричному тензору второго ранга A_{ik} можно сопоставить по формуле

$$\overset{*}{A}{}^{ik} = \frac{1}{2}\sum_{l,m=0}^{3} \varepsilon^{iklm} A_{lm} \qquad (22.06)$$

антисимметричный псевдо-тензор $\overset{*}{A}{}^{ik}$ того же ранга; он называется дуальным по отношению к данному тензору. В сумме (22.06) только два члена отличны от нуля, и эти члены друг другу равны. Поэтому мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &\overset{*}{A}{}^{10} = A_{23}; \quad \overset{*}{A}{}^{20} = A_{31}; \quad \overset{*}{A}{}^{30} = A_{12}, \\ &\overset{*}{A}{}^{23} = A_{10}; \quad \overset{*}{A}{}^{31} = A_{20}; \quad \overset{*}{A}{}^{12} = A_{30}, \end{aligned}\right\} \qquad (22.07)$$

Подобно этому, антисимметричному тензору третьего ранга A_{ikl} можно по формуле

$$\overset{*}{A}{}^{i} = \frac{1}{6} \sum_{k,l,m=0}^{3} \varepsilon^{iklm} A_{klm} \tag{22.08}$$

сопоставить псевдо-вектор (т. е. псевдо-тензор первого ранга). В сумме (22.08) отличны от нуля шесть членов, но они между собою равны. Мы получим для составляющих псевдо-вектора явные выражения

$$\overset{*}{A}{}^{0} = -A_{123}; \quad \overset{*}{A}{}^{1} = A_{230}; \quad \overset{*}{A}{}^{2} = A_{310}; \quad \overset{*}{A}{}^{3} = A_{120}. \tag{22.09}$$

Будем для краткости называть „произведением тензора на тензор" такой тензор, составляющие которого получаются по правилам § 21 путем перемножения составляющих двух данных тензоров. Тогда мы можем сказать, что произведение псевдо-тензора на псевдо-тензор (так же как и тензора на тензор) будет тензором, тогда как произведение тензора на псевдо-тензор будет псевдо-тензором. Этим правилом мы фактически уже пользовались при составлении псевдо-тензора $\overset{*}{A}{}^{ik}$ и псевдо-вектора $\overset{*}{A}{}^{i}$.

§ 23. Бесконечно малое преобразование Лоренца

Общее преобразование Лоренца (с переносом начала) имеет вид

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k. \tag{23.01}$$

Рассмотрим тот случай, когда преобразование (23.01) бесконечно мало отличается от тождественного преобразования. В этом случае постоянные a_i будут бесконечно малыми, а коэффициенты a_{ik} могут быть написаны в виде

$$a_{ik} = e_k \delta_{ik} + \omega^{ik}, \tag{23.02}$$

где ω^{ik} — бесконечно малые величины. Чтобы подчеркнуть, что координаты представляют собой контравариантный вектор, мы будем в этом параграфе писать при них *верхние* значки

$$x^0 = ct; \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \tag{23.03}$$

Бесконечно малые постоянные, представляющие смещение начала, мы будем также писать с верхними значками (a^i вместо a_i). В новых обозначениях результат подстановки (23.02) в (23.01) напишется:

$$x'^i = x^i + a^i + \sum_{k=0}^{3} e_k \omega^{ik} x^k. \tag{23.04}$$