Подобно этому, антисимметричному тензору третьего ранга A_{ikl} можно по формуле

$$\overset{*}{A}{}^{i} = \frac{1}{6} \sum_{k, l, m=0}^{3} \varepsilon^{iklm} A_{klm} \tag{22.08}$$

сопоставить псевдо-вектор (т. е. псевдо-тензор первого ранга). В сумме (22.08) отличны от нуля шесть членов, но они между собою равны. Мы получим для составляющих псевдо-вектора явные выражения

$$\overset{*}{A}{}^{0} = -A_{123}; \quad \overset{*}{A}{}^{1} = A_{230}; \quad \overset{*}{A}{}^{2} = A_{310}; \quad \overset{*}{A}{}^{3} = A_{120}. \tag{22.09}$$

Будем для краткости называть „произведением тензора на тензор" такой тензор, составляющие которого получаются по правилам § 21 путем перемножения составляющих двух данных тензоров. Тогда мы можем сказать, что произведение псевдо-тензора на псевдо-тензор (так же как и тензора на тензор) будет тензором, тогда как произведение тензора на псевдо-тензор будет псевдо-тензором. Этим правилом мы фактически уже пользовались при составлении псевдо-тензора $\overset{*}{A}{}^{ik}$ и псевдо-вектора $\overset{*}{A}{}^{i}$.

§ 23. Бесконечно малое преобразование Лоренца

Общее преобразование Лоренца (с переносом начала) имеет вид

$$x'_i = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k. \tag{23.01}$$

Рассмотрим тот случай, когда преобразование (23.01) бесконечно мало отличается от тождественного преобразования. В этом случае постоянные a_i будут бесконечно малыми, а коэффициенты a_{ik} могут быть написаны в виде

$$a_{ik} = e_k \delta_{ik} + \omega^{ik}, \tag{23.02}$$

где ω^{ik} — бесконечно малые величины. Чтобы подчеркнуть, что координаты представляют собой контравариантный вектор, мы будем в этом параграфе писать при них *верхние* значки

$$x^0 = ct; \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \tag{23.03}$$

Бесконечно малые постоянные, представляющие смещение начала, мы будем также писать с верхними значками (a^i вместо a_i). В новых обозначениях результат подстановки (23.02) в (23.01) напишется:

$$x'^i = x^i + a^i + \sum_{k=0}^{3} e_k \omega^{ik} x^k. \tag{23.04}$$

Так как для бесконечно малого преобразования различие между данной и преобразованной системой отсчета становится несущественным, то разности

$$\Delta x^i = x'^i - x^i \tag{23.05}$$

мы можем рассматривать как вектор, отнесенный к одной из этих систем отсчета, скажем, к первоначальной. Таким образом, выражения

$$\Delta x^i = a^i + \sum_{k=0}^{3} e_k \omega^{ik} x^k \tag{23.06}$$

представляют бесконечно малый контравариантный вектор. Отсюда следует, что постоянные a^i сами образуют такой вектор, а постоянные ω^{ik} образуют контравариантный тензор. Тензор этот будет антисимметричным. В самом деле, условия ортогональности коэффициентов преобразования Лоренца

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl} \tag{23.07}$$

после подстановки в них выражений (23.02) и пренебрежения бесконечно малыми второго порядка принимают вид

$$\omega^{ik} + \omega^{ki} = 0. \tag{23.08}$$

Антисимметричный тензор второго ранга имеет шесть независимых составляющих. Эти шесть величин, вместе с четырьмя компонентами вектора смещения начала, представляют десять независимых параметров, которые и характеризуют бесконечно малое преобразование Лоренца.

Произведем последовательно два бесконечно малых преобразования: одно с параметрами a^i, ω^{ik} и другое с параметрами b^i, φ^{ik}. Легко видеть, что результат двух таких преобразований равносилен, с точностью до величин второго порядка, одному преобразованию с параметрами

$$c^i = a^i + b^i; \quad \psi^{ik} = \omega^{ik} + \varphi^{ik}. \tag{23.09}$$

Отсюда, в частности, следует, что результат двух бесконечно малых преобразований не зависит от их порядка. Пользуясь этим, мы можем последовательно рассмотреть смещение начала, переход к движущейся системе отсчета и бесконечно малый поворот пространственных осей.

Полагая

$$a^0 = c\tau, \quad a^1 = a_x; \quad a^2 = a_y; \quad a^3 = a_z, \tag{23.10}$$

мы получим преобразование, которое соответствует переносу начала счета времени на более *ранний* момент на величину τ и переносу начала координат *назад* на величину вектора **a**. Переход к системе отсчета, движущейся с бесконечно малой скоростью **V**, означает преобразование

$$\left.\begin{aligned} x'-x=\Delta x=-V_x t, \\ y'-y=\Delta y=-V_y t, \\ z'-z=\Delta z=-V_z t \end{aligned}\right\} \tag{23.11}$$

для координат и преобразование

$$t'-t=\Delta t=-\frac{1}{c^2}(xV_x+yV_y+zV_z) \tag{23.12}$$

для времени.

Переходя от трехмерной символики к четырехмерной и сравнивая коэффициенты в (23.11) и в (23.06), получаем

$$\omega^{10}=-\frac{V_x}{c};\quad \omega^{20}=-\frac{V_y}{c};\quad \omega^{30}=-\frac{V_z}{c}. \tag{23.13}$$

Сравнение коэффициентов в (23.12) и в (23.06) дает

$$\omega^{01}=\frac{V_x}{c};\quad \omega^{02}=\frac{V_y}{c};\quad \omega^{03}=\frac{V_z}{c} \tag{23.14}$$

— результат очевидный, так как тензор ω^{ik} антисимметричен.

Рассмотрим, наконец, бесконечно малый поворот пространственных осей. По известной формуле кинематики мы имеем

$$\Delta\mathbf{r}=[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}], \tag{23.15}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор бесконечно малого поворота (составляющие его равны бесконечно малым углам поворота вокруг осей x, y, z).

Сравнивая (23.15) и (23.06), получаем

$$\omega^{23}=-\omega^{32}=\omega_x;\quad \omega^{31}=-\omega^{13}=\omega_y;\quad \omega^{12}=-\omega^{21}=\omega_z. \tag{23.16}$$

Мы выпишем также ковариантные составляющие тензора ω_{ik}. Опуская значки по известному правилу, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{10}=\frac{V_x}{c};\quad \omega_{20}=\frac{V_y}{c};\quad \omega_{30}=\frac{V_z}{c}, \\ &\omega_{23}=\omega_x;\quad \omega_{31}=\omega_y;\quad \omega_{12}=\omega_z, \end{aligned}\right\} \tag{23.17}$$

тогда как остальные составляющие получаются из условия антисимметрии.

В заключение заметим, что формулы для конечного преобразования Лоренца можно получить, исходя из рассмотрения бесконечно малого преобразования; но на этом мы останавливаться не будем.