§ 24. Закон преобразования электромагнитного поля и ковариантность уравнений Максвелла

При выводе основных формул теории относительности мы исходили из закона распространения фронта электромагнитной волны, вытекающего, как показано в § 3, из уравнений Максвелла. Нам надлежит теперь проверить, что уравнения Максвелла действительно являются ковариантными по отношению к преобразованию Лоренца, а для этого нужно прежде всего установить закон преобразования электромагнитного поля при переходе к новой системе отсчета.

Как известно, электромагнитное поле может быть выражено через скалярный и векторный потенциалы по формулам

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; & E_1 &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \\ H_2 &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; & E_2 &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\ H_3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}; & E_3 &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \end{aligned}\right\} \tag{24.01}$$

Поле обращается в нуль в том и только в том случае, когда линейная дифференциальная форма

$$\delta\varphi = -c\Phi\, dt + A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3 \tag{24.02}$$

есть полный дифференциал. Мы примем, что эта линейная форма является инвариантом (скаляром). Для этого достаточно считать A_1, A_2, A_3 пространственными (ковариантными) составляющими четырехмерного вектора, нулевая составляющая которого равна

$$A_0 = -\Phi. \tag{24.03}$$

Имея в виду, что $ct = x_0$, мы можем написать $\delta\varphi$ в виде

$$\delta\varphi = \sum_{i=0}^{3} A_i\, dx_i. \tag{24.04}$$

Обычное условие нормировки для потенциалов

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{24.05}$$

будет условием, инвариантным относительно преобразований Лоренца, так как его можно написать в виде

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0 \tag{24.06}$$

или, если ввести контравариантные составляющие

$$A^0 = A_0 = -\Phi; \quad A^1 = -A_1; \quad A^2 = -A_2; \quad A^3 = -A_3, \tag{24.07}$$

в виде

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial A^i}{\partial x_i} = 0. \tag{24.08}$$

Подставляя в (24.01) $x_0 = ct$, $A_0 = -\Phi$, перепишем выражения для поля в новых обозначениях. Мы получим для электрического поля

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_0}, \\ E_2 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_0}, \\ E_3 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_0}, \end{aligned}\right\} \tag{24.09}$$

тогда как для магнитного поля останутся прежние выражения. Все эти выражения мы можем записать короче, если положим

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{24.10}$$

Мы будем тогда иметь

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= F_{23} & E_1 &= F_{10} \\ H_2 &= F_{31} & E_2 &= F_{20} \\ H_3 &= F_{12} & E_3 &= F_{30} \end{aligned}\right\} \tag{24.11}$$

Если (A_i) есть ковариантный вектор, то (F_{ik}) есть антисимметричный тензор второго ранга. Таким образом, наше предположение о векторном характере потенциалов приводит нас к заключению, что шесть составляющих электромагнитного поля представляют, в четырехмерном многообразии пространства-времени, антисимметричный тензор. На основании этого легко проверить, что уравнения Максвелла ковариантны по отношению к преобразованию Лоренца. В самом деле, построим из производных от составляющих поля тензор третьего ранга:

$$F_{ikl} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}, \tag{24.12}$$

который, очевидно, будет антисимметричным. По формулам (22.09) ему можно сопоставить псевдо-вектор

$$\overset{*}{F}{}^0 = -F_{123}; \quad \overset{*}{F}{}^1 = F_{230}; \quad \overset{*}{F}{}^2 = F_{310}; \quad \overset{*}{F}{}^3 = F_{120}. \tag{24.13}$$

Вычислим составляющие этого псевдо-вектора. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{F}{}^0 &= -\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = -\operatorname{div}\mathbf{H};\\
\overset{*}{F}{}^1 &= \frac{\partial F_{23}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x_2} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2};\\
\overset{*}{F}{}^2 &= \frac{\partial F_{31}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{10}}{\partial x_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3};\\
\overset{*}{F}{}^3 &= \frac{\partial F_{12}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x_1} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_3}{\partial t} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1}.
\end{aligned}\right\} \quad (24.14)$$

Для наглядности мы заменили в правой части x_0 на ct. В силу уравнений Максвелла

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \qquad (24.15)$$

правые части равенств (24.14) равны нулю.

Следовательно, первая группа уравнений Максвелла может быть записана в ковариантной форме

$$\overset{*}{F}{}^i = 0 \qquad (24.16)$$

или

$$F_{ikl} = 0. \qquad (24.17)$$

Обратимся теперь ко второй группе уравнений Максвелла. Для этого перейдем от ковариантных составляющих тензора поля к контравариантным

$$\left.\begin{aligned}
F^{23} &= H_1 & F^{10} &= -E_1\\
F^{31} &= H_2 & F^{20} &= -E_2\\
F^{12} &= H_3 & F^{30} &= -E_3
\end{aligned}\right\} \qquad (24.18)$$

и составим контравариантный вектор

$$s^i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k}. \qquad (24.19)$$

Мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
s^0 &= 0 + \frac{\partial F^{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x_3} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3};\\
s^1 &= \frac{\partial F^{10}}{\partial x_0} + 0 + \frac{\partial F^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3};\\
s^2 &= \frac{\partial F^{20}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial F^{23}}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1};\\
s^3 &= \frac{\partial F^{30}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x_2} + 0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2}.
\end{aligned}\right\} \quad (24.20)$$

Таким образом, нулевая составляющая вектора s^i равна

$$s^0 = \operatorname{div} \mathbf{E}, \tag{24.21}$$

а пространственные составляющие совпадают с составляющими трехмерного вектора

$$(s^1,\ s^2,\ s^3) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{H}. \tag{24.22}$$

В свободном пространстве правые части этих уравнений равны нулю. Следовательно, вторая группа уравнений Максвелла для свободного пространства может быть записана в ковариантной форме

$$s^i \equiv \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{24.23}$$

В пространстве, заполненном зарядами с плотностью ρ, уравнения Максвелла — Лоренца имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{24.24}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока. Ковариантность уравнений Максвелла будет обеспечена, если величины

$$s^0 = 4\pi\rho; \quad s^i = \frac{4\pi}{c} j_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{24.25}$$

будут представлять контравариантные компоненты четырехмерного вектора. В силу тождества

$$\sum_{i,\,k=0}^{3} \frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0 \tag{24.26}$$

мы должны иметь

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0, \tag{24.27}$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{24.28}$$

Это уравнение выражает, как известно, закон сохранения заряда.

Четырехмерный векторный характер величин (24.25) вполне согласуется с их физическим толкованием по Лоренцу. Согласно этому толкованию, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, где ρ — плотность заряда, а $\mathbf{v}$ — его скорость. Четырехмерный вектор тока

$$\rho c,\ \rho v_1,\ \rho v_2,\ \rho v_3 \tag{24.29}$$

пропорционален вектору четырехмерной скорости

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^1 = \frac{v_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \\ u^2 &= \frac{v_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^3 = \frac{v_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{24.30}$$

[см. (20.18)], причем коэффициент пропорциональности равен

$$\rho^* = \rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{24.31}$$

и представляет собою инвариант, физический смысл которого есть плотность заряда в той системе отсчета, где этот заряд в данный момент неподвижен.

Мы проверили ковариантность уравнений Максвелла и установили, что закон преобразования электромагнитного поля при переходе к другой системе отсчета совпадает с законом преобразования антисимметричного тензора второго ранга. Напишем этот закон преобразования в явной форме, введя вместо коэффициентов преобразования Лоренца a_{ik} их значения, соответствующие тому случаю, когда преобразование Лоренца не сопровождается поворотом пространственных координатных осей. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \\ a_{0i} &= \frac{a_{00}}{c}V_i; \quad a_{i0} = -\frac{a_{00}}{c}V_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3); \\ a_{ik} &= -\delta_{ik} - (a_{00}-1)\frac{V_iV_k}{V^2} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{24.32}$$

Подставляя эти значения в общую формулу

$$F'_{ik} = e_ie_k\sum_{j,\,l=0}^{3} a_{ij}a_{kl}F_{jl} \tag{24.33}$$

и пользуясь антисимметрией тензора F_{ik}, получим

$$\begin{aligned} F'_{23} = a_{00}F_{23} - (a_{00}-1)\frac{V_1}{V^2}(V_1F_{23}+V_2F_{31}+V_3F_{12}) - \\ - \frac{1}{c}a_{00}(V_2F_{30}-V_3F_{20}) \end{aligned} \tag{24.34}$$

и два других уравнения, получаемых из (24.34) круговой перестановкой значков 1, 2, 3, а также

$$F'_{10} = a_{00}F_{10} - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(V_1F_{10} + V_2F_{20} + V_3F_{30}) + \\ + \frac{1}{c}a_{00}(V_2F_{12} - V_3F_{31}) \qquad (24.35)$$

и два других уравнения, получаемых круговой перестановкой. Переходя, согласно (24.11), к обычным обозначениям для электрического и магнитного поля и пользуясь формулами трехмерного векторного исчисления, мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} E'_1 &= a_{00}E_1 - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}) + \frac{a_{00}}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}]_1, \\ H'_1 &= a_{00}H_1 - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{H}) - \frac{a_{00}}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}]_1. \end{aligned}\right\} \qquad (24.36)$$

Переходя от составляющих к векторам, заменяя a_{00} его значением и группируя члены в несколько ином порядке, получим окончательно

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}) + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}]\right); \qquad (24.37)$$

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{H}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{H}) - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}]\right). \qquad (24.38)$$

Для сравнения приведем здесь формулы преобразования для ковариантного четырехмерного вектора, причем будем применять для его пространственных составляющих обычные векторные обозначения:

$$A'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(A_0 + \frac{1}{c}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A})\right); \qquad (24.39)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cdot\frac{\mathbf{V}}{V^2}\left((\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}) + \frac{V^2}{c}A_0\right). \qquad (24.40)$$

По поводу формул для поля заметим, что

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{V} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{V}; \qquad \mathbf{H}'\cdot\mathbf{V} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{V}. \qquad (24.41)$$

Это значит, что та часть электрического или магнитного поля, которая параллельна скорости $\mathbf{V}$, остается без изменения. В пространственной части четырехмерного вектора, напротив, остается без изменения та часть, которая перпендикулярна скорости $\mathbf{V}$, так как мы имеем

$$\mathbf{A}' - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}') = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}). \qquad (24.42)$$

Если рассматривать частное преобразование Лоренца и положить

$$V_x = V;\quad V_y = V_z = 0, \tag{24.43}$$

то формулы преобразования для поля упростятся и напишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}
E'_x &= E_x; & H'_x &= H_x,\\
E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(E_y - \frac{V}{c} H_z\right); & H'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(H_y + \frac{V}{c} E_z\right),\\
E'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(E_z + \frac{V}{c} H_y\right); & H'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(H_z - \frac{V}{c} E_y\right).
\end{aligned}\right\} \tag{24.44}$$

Из составляющих поля можно построить две комбинации, которые при преобразовании Лоренца остаются без изменения. Мы имеем

$$\mathbf{E}'^2 - \mathbf{H}'^2 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2; \tag{24.45}$$

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \tag{24.46}$$

Первая из этих величин остается без изменения также и при несобственных преобразованиях Лоренца (см. § 22) и является скаляром. Вторая же меняет при несобственных преобразованиях свой знак и является псевдо-скаляром. В этом легко убедиться при помощи тензорной символики. Мы имеем

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{3} F_{ik}F^{ik}; \tag{24.47}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{4} \sum_{i,k=0}^{3} F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}, \tag{24.48}$$

где $\overset{*}{F}{}^{ik}$ — антисимметричный псевдо-тензор, связанный с тензором поля по формуле, аналогичной (22.06) или (22.07).

Заметим, что для плоской волны оба выражения (24.45) и (24.46) обращаются в нуль (в любой системе отсчета).

Формулы преобразования для поля, как и уравнения Максвелла, указывают на существование самой тесной связи между электрическим полем и магнитным. Так, поле от зарядов, неподвижных в некоторой системе отсчета, будет в этой системе чисто электростатическим; но в другой системе отсчета, которая относительно этих зарядов движется, к электрическому полю добавится еще магнитное. Это становится понятным, если вспомнить, что движущиеся заряды представляют электрический ток. Подобно этому, поле, чисто магнитное в одной системе отсчета, будет в другой системе проявляться, как наложение магнитного и электрического полей.