§ 25. Движение заряженной материальной точки в заданном внешнем поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в заданном внешнем поле. Как мы видели ранее [формула (20.23)] четырехмерный вектор ускорения имеет составляющие

$$\left.\begin{aligned} w^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right); \\ w^i &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt}\right) \quad (i=1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{25.01}$$

Здесь под знаком производных по времени стоят составляющие четырехмерной скорости

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{25.02}$$

причем

$$v^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2. \tag{25.03}$$

Введем такую (штрихованную) систему отсчета, в которой мгновенная скорость частицы равна нулю. Мы будем исходить из предположения, что в этой сопутствующей системе отсчета обычное ускорение пропорционально электрическому полю

$$\frac{d^2x_i'}{dt'^2} = \frac{e}{m}E_i', \tag{25.04}$$

и перейдем затем обратно к исходной системе отсчета.

В штрихованной системе отсчета четырехмерные скорость и ускорение равны

$$u'^0 = c, \quad u'^1 = u'^2 = u'^3 = 0; \tag{25.05}$$

$$w'^0 = 0, \quad w'^i = \frac{d^2x'^i}{dt'^2}. \tag{25.06}$$

Таким образом, в штрихованной системе четырехмерное ускорение выражается через поле следующим образом:

$$w'^0 = 0, \quad w'^i = \frac{e}{m}E_i'. \tag{25.07}$$

По формулам преобразования контравариантного вектора (совпадающим с формулами преобразования координат) мы имеем

$$w^i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} w'^k. \tag{25.08}$$

Подставляя в правую часть значения (25.07) для w'^i, получим для четырехмерного ускорения в исходной системе отсчета выражения

$$w^i = -\frac{e}{m}(a_{1i}E'_1 + a_{2i}E'_2 + a_{3i}E'_3). \qquad (25.09)$$

Сюда нужно подставить значения a_{ik} из (24.32). Мы получим

$$w^0 = \frac{e}{m}\cdot\frac{a_{00}}{c}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}'); \qquad (25.10)$$

$$w^i = \frac{e}{m}\left(E'_i + (a_{00}-1)\frac{V_i}{V^2}(\mathbf{V}\cdot E')\right). \qquad (25.11)$$

Теперь остается выразить $\mathbf{E}'$ через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Так как $\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}' = \mathbf{V}\cdot\mathbf{E}$, формула (24.36) дает, после замены a_{00} его выражением,

$$w^0 = \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{c^2-V^2}}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}); \qquad (25.12)$$

$$w^i = \frac{e}{m}\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}]\right)_i. \qquad (25.13)$$

Здесь $\mathbf{V}$ есть скорость сопутствующей системы отсчета; эта скорость совпадает в рассматриваемый момент со скоростью $\mathbf{v}$ частицы. Заменяя поэтому $\mathbf{V}$ на $\mathbf{v}$, перепишем предыдущие уравнения в виде

$$w^0 = \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}); \qquad (25.14)$$

$$w^i = \frac{e}{m}\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\right)_i. \qquad (25.15)$$

Теперь мы можем освободиться от сопутствующей системы отсчета, считая, что написанные уравнения справедливы во всякий момент времени, так что они представляют собой уравнения движения частицы. Форма уравнений (25.14) и (25.15), однако, неудобна тем, что в них применен смешанный способ написания: в левой части стоит четырехмерный вектор, тогда как правые части выражены через трехмерные величины. Перейдем поэтому к единообразному способу написания и выразим обе части сперва через четырехмерные, а затем через трехмерные величины.

Пользуясь обозначениями (25.02) для четырехмерной скорости и обозначениями (24.11) для поля, мы можем написать уравнения (25.14) и (25.15) в виде

$$w^0 = \frac{e}{m}(u^1F_{10} + u^2F_{20} + u^3F_{30}); \qquad (25.16)$$

$$w^i = \frac{e}{m}(u^0F_{i0} + u^1F_{i1} + u^2F_{i2} + u^3F_{i3}) \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (25.17)$$

Вследствие антисимметрии тензора F_{ik} в правой части каждого из уравнений (25.17) будет фактически не четыре, а три члена. Переходя к ковариантному вектору ускорения

$$w_0 = w^0;\quad w_1 = -w^1;\quad w_2 = -w^2;\quad w_3 = -w^3, \tag{25.18}$$

мы будем иметь для всех значений i от 0 до 3

$$w_i = -\frac{e}{m}\sum_{k=0}^{3} u^k F_{ik}. \tag{25.19}$$

Здесь справа и слева стоит ковариантный вектор; поэтому очевидно, что уравнения движения в форме (25.19) сохраняют свой вид в любой системе отсчета, как и должно быть. Легко проверить, что

$$\sum_{i=0}^{3} u^i w_i = 0 \tag{25.20}$$

в согласии с (20.24). Первое из уравнений движения является поэтому следствием трех остальных.

Ввиду ковариантности уравнений (25.19), для обоснования их достаточно было бы проверить, что в сопутствующей (штрихованной) системе отсчета они приводятся к виду (25.07).

Переходим теперь к трехмерному способу написания. Используя выражения (25.01) для четырехмерного вектора ускорения и вводя трехмерную векторную символику, мы будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}); \tag{25.21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\right). \tag{25.22}$$

В уравнении (25.21) правая часть представляет собою мощность, т. е. работу, производимую полем над частицей в единицу времени; по общим принципам механики левую часть следует поэтому толковать, как приращение кинетической энергии частицы в единицу времени. В уравнении (25.22) правая часть представляет лоренцову силу, а левая часть есть приращение, в единицу времени, количества движения частицы.

Таким образом, кинетическая энергия частицы и ее количество движения могут отличаться только на постоянные от выражений

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25.23}$$

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25.24}$$

которые стоят в уравнениях движения под знаком производных по времени. Значения этих постоянных определяются из требования ковариантности: необходимо потребовать, чтобы энергия и количество движения частицы *) составляли четырехмерный вектор. Но величины (25.23) и (25.24) сами составляют четырехмерный вектор, поскольку они пропорциональны нулевой и пространственным составляющим четырехмерной скорости. Поэтому упомянутые постоянные равны нулю **). Следовательно, величины (25.23) и (25.24) представляют энергию и количество движения частицы.

При $v = 0$ получается, в соответствии со старыми представлениями, $P = 0$: количество движения неподвижного тела равно нулю. Но энергия W получает при $v = 0$ отличное от нуля значение

$$W_0 = mc^2. \tag{25.25}$$

Этот результат противоречит старым представлениям, но полностью подтверждается на опыте: всякому телу с массой m соответствует запас энергии W_0 (см. ниже § 34). Подобное соотношение

$$W = Mc^2 \tag{25.26}$$

между массой и энергией тела имеет место и для произвольной скорости v, если только разуметь под M величину

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25.27}$$

которая сама зависит от скорости. Величину M следует рассматривать, как рациональное обобщение понятия массы. Она входит, в качестве множителя при скорости $\mathbf{v}$, в выражение (25.24) для количества движения $\mathbf{P}$ и характеризует поэтому инертность тела (его инертную массу). Величину M называют просто массой, тогда как m называется массой покоя. Сообразно этому, величину W называют просто энергией, а величину W_0 — энергией покоя.

Масса покоя m есть постоянная, которая не зависит от состояния движения частицы как целого, но может зависеть от внутреннего состояния частицы (если последняя имеет сложную структуру и обладает внутренними степенями свободы). Масса покоя m выражается через инвариант четырехмерного вектора энергии — количества движения. В самом деле, инвариант этот от скорости не зависит и равен

$$\frac{W^2}{c^2} - P^2 = m^2c^2. \tag{25.28}$$

---

*) Точнее, деленная на c энергия и количество движения.

**) Подробнее можно было бы рассуждать так. Упомянутые постоянные должны, с одной стороны, составлять вектор, а с другой стороны, они не должны зависеть от состояния движения, а значит, и от системы отсчета. Но отличного от нуля постоянного вектора, значения составляющих которого не зависели бы от системы отсчета, не существует.

Зависимость массы M от скорости такова, что при приближении скорости частицы к скорости света масса ее неограниченно возрастает. Вследствие этого ни в какой системе отсчета ни одно тело с массой покоя, отличной от нуля, не может достичь скорости света. Это обстоятельство наглядно подтверждает предельный характер скорости света.

Если же скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, то разность

$$W - mc^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \ldots \tag{25.29}$$

будет лишь на малые величины отличаться от обычного выражения для кинетической энергии частицы.

Предыдущие соотношения выведены нами из уравнений движения заряженной частицы, но они имеют общий характер. Так, соотношение (25.26) между массой и энергией справедливо не только для рассмотренного здесь случая материальной точки с неизменной массой покоя, но и для любого сложного тела или системы тел, в которой могут происходить внутренние процессы, меняющие массу покоя. Соотношение это выражает фундаментальный закон пропорциональности между массой и энергией. К рассмотрению этого закона мы вернемся в § 34.

§ 26. Приближенная постановка задачи о движении системы зарядов

Задача о движении системы заряженных материальных точек требует совместного определения движения зарядов и электромагнитного поля, в котором они движутся, причем наперед заданным может считаться только внешнее поле. Передача взаимодействия между зарядами осуществляется полем и происходит с конечной скоростью (со скоростью света). Вследствие этого сила, действующая на данный заряд, будет зависеть не от мгновенного, а от предшествующего состояния движения остальных зарядов. Поле, возникающее при ускоренном движении зарядов, не только передает взаимодействие, но и излучается вовне; поэтому энергия системы зарядов будет частично тратиться на излучение и система не будет консервативной. Кроме того, необходимо помнить, что поле обладает бесконечным числом степеней свободы; поэтому система, состоящая из зарядов и поля, будет, строго говоря, системой с бесконечным числом степеней свободы, а не чисто механической системой.

Тем не менее задачу о движении зарядов можно приближенно формулировать как задачу механики, ограничиваясь степенями свободы самих зарядов. Для этого нужно поле (точнее, потенциалы) каждого из зарядов выразить через его положение и скорость и затем приближенно произвести пересчет от предшествующего момента