или, если мы в первом интеграле обозначим переменную интегрирования t' той же буквой t, как и во втором,

$$S' - S = \int\limits_{(1)}^{(2)} L'(t)\,dt - \int\limits_{(1)}^{(2)} L(t)\,dt. \tag{26.47}$$

Здесь $L'(t)$ есть выражение, получаемое из $L(t)$ заменой $\mathbf{r}_a$ на $\mathbf{r}'_a$ и $\mathbf{v}_a$ на $\mathbf{v}'_a$ по формулам (26.36) и (26.37).

Из соотношения (26.47) следует, что для ковариантности уравнений движения достаточно, чтобы разность

$$\{L'(t) - L(t)\}\,dt = dF \tag{26.48}$$

была полным дифференциалом некоторой функции F. В самом деле, тогда будет

$$S' - S = F^{(2)} - F^{(1)}, \tag{26.49}$$

где $F^{(2)}$ и $F^{(1)}$ — значения функции F на пределах, и, следовательно, вариации интегралов S и S' будут друг другу равны.

Выполняя вычисления, мы можем убедиться, что соотношение (26.48) действительно выполняется, причем функция F равна

$$F = \sum_a \left(-m_a + \frac{1}{2} m_a \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \right) \left((\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_a) - \frac{V^2}{2} t \right) - \\ - \frac{1}{c^2} \sum_a m_a (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_a)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}_a) + \\ + \frac{V^2}{2c^2} \sum_a m_a (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_a) + \frac{V^4}{8c^2} \sum_a m_a t. \tag{26.50}$$

Тем самым доказано, что получаемые из функции Лагранжа (26.23) или (26.24) уравнения движения действительно ковариантны (в данном приближении) по отношению к преобразованию Лоренца.

§ 27. Вывод законов сохранения в механике системы точек

Обратимся теперь к выводу интегралов уравнений движения. Для этого рассмотрим изученное в § 23 бесконечно малое преобразование Лоренца, содержащее все десять параметров. Напомним, что параметры эти таковы: изменение начала счета времени τ, смещение начала пространственных координат $\mathbf{a}$, переход к системе отсчета, движущейся относительно первоначальной со скоростью $\mathbf{V}$, бесконечно малый поворот пространственных осей на величину $\boldsymbol{\omega}$. Нам нужно вычислить получаемое в результате такого преобразования изменение вида функций от времени, представляющих координаты каждой частицы. Это изменение $\delta\mathbf{r}_b$ происходит от двух причин:

во-первых, от векторного характера $\mathbf{r}_b$ и, во-вторых, от изменения аргумента t.

Изменение от векторного характера $\mathbf{r}_b$ равно, согласно (23.06) и (23.17),

$$\Delta\mathbf{r}_b = \mathbf{a} - \mathbf{V}t + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_b]. \tag{27.01}$$

Аргумент t меняется для b-той частицы на величину

$$\Delta t_b = \tau - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_b), \tag{27.02}$$

где первый член происходит от изменения начала счета времени, а второй — от перехода к движущейся системе отсчета. [Формула (27.02) есть одно из уравнений (23.06).]

Изменение $\Delta^*\mathbf{r}_b$ вследствие изменения аргумента в функции $\mathbf{r}_b(t)$ получается из равенства

$$\mathbf{r}_b(t) = \mathbf{r}'_b(t') \qquad (t' = t + \Delta t_b), \tag{27.03}$$

откуда

$$\mathbf{r}'_b(t) = \mathbf{r}_b(t - \Delta t_b) = \mathbf{r}_b(t) - \mathbf{v}_b\,\Delta t_b \tag{27.04}$$

и, следовательно,

$$\Delta^*\mathbf{r}_b = \mathbf{r}'_b(t) - \mathbf{r}_b(t) = -\mathbf{v}_b\,\Delta t_b. \tag{27.05}$$

Полное изменение вида функции $\mathbf{r}_b(t)$ будет равно

$$\delta\mathbf{r}_b = \Delta\mathbf{r}_b + \Delta^*\mathbf{r}_b = \Delta\mathbf{r}_b - \mathbf{v}_b\,\Delta t_b. \tag{27.06}$$

Таким образом, согласно (27.01) и (27.02), полное изменение $\delta\mathbf{r}_b$ выразится через параметры бесконечно малого преобразования Лоренца следующим образом:

$$\delta\mathbf{r}_b = -\mathbf{v}_b\tau + \mathbf{a} - \mathbf{V}t + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_b(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_b) + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_b], \tag{27.07}$$

тогда как полное изменение $\delta\mathbf{v}_b$ скорости $\mathbf{v}_b$ будет, очевидно, равно

$$\delta\mathbf{v}_b = \frac{d}{dt}\,\delta\mathbf{r}_b. \tag{27.08}$$

В выражении для $\delta\mathbf{r}_b$ члены, содержащие $\mathbf{V}$, совпадают с членами первого порядка (относительно $\mathbf{V}$) в формуле (26.36), как и должно быть.

Вычислим теперь двумя способами изменение функции Лагранжа в результате бесконечно малого преобразования Лоренца. Первый способ основан на применении уравнений движения, а второй — на непосредственном преобразовании, с использованием формул (26.48) и (26.50). Мы имеем

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta\mathbf{v}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta\mathbf{r}_a\right), \tag{27.09}$$

поскольку функция L не содержит явно времени.

Здесь под $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$ разумеется трехмерный вектор с составляющими $\frac{\partial L}{\partial x_a}$, $\frac{\partial L}{\partial y_a}$, $\frac{\partial L}{\partial z_a}$; аналогичное значение имеет $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$. Используя уравнения движения и соотношение (27.08), мы можем написать

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{r}_a. \tag{27.10}$$

С другой стороны, мы можем вычислить изменение функции Лагранжа L и без использования уравнений движения. Очевидно, что L не меняется при смещении начала и при повороте пространственных координат. При изменении начала счета времени L меняется на величину $-\frac{dL}{dt} \cdot \tau$. В самом деле, если $L'(t') = L(t)$, где $t' = t + \tau$, то

$$L'(t) = L(t - \tau) = L(t) - \tau \frac{dL}{dt}. \tag{27.11}$$

Изменение же L в результате перехода к движущейся системе отсчета дается формулой (26.48), где в качестве F достаточно взять члены первого порядка (относительно $\mathbf{V}$) из (26.50), а именно

$$F = \sum_a \Bigg(- m_a + \frac{1}{2} m_a \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \Bigg) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_a). \tag{27.12}$$

Таким образом,

$$\delta L = -\tau \frac{dL}{dt} + \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tau L + F). \tag{27.13}$$

Приравнивая (27.10) и (27.13), получаем

$$\frac{d}{dt} \Big\{ \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{r}_a + L\tau - F \Big\} = 0, \tag{27.14}$$

откуда

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{r}_a + L\tau - F = \text{const}. \tag{27.15}$$

Левая часть этого выражения представляет линейную функцию от десяти параметров преобразования Лоренца. Подставляя в (27.15) выражения (27.07) и (27.12) для $\delta \mathbf{r}_a$ и для F, мы можем написать:

$$I \equiv -\tau W + \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{K} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} = \text{const}, \tag{27.16}$$

где уже W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ от параметров не зависят и равны:

$$W = \sum_a \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L, \tag{27.17}$$

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}, \tag{27.18}$$

$$\mathbf{K} = \sum_a \left(m_a - \frac{1}{2} m_a \frac{v_a^2}{c^2} + \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\right) \mathbf{r}_a - t \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}, \tag{27.19}$$

$$\mathbf{M} = \sum_a \left[\mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\right]. \tag{27.20}$$

Левая часть (27.16) должна быть постоянна, каковы бы ни были значения параметров τ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\omega}$. Это возможно только, если величины W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ сами постоянны. Мы получаем, таким образом, десять интегралов, причем каждый из них связан с определенным параметром в бесконечно малом преобразовании Лоренца. Легко видеть, каков физический смысл этих интегралов: W есть интеграл энергии, $\mathbf{P}$ — интеграл количества движения, $\mathbf{K}$ — интеграл движения центра инерции, $\mathbf{M}$ — интеграл момента количества движения. Таким образом, найденные десять интегралов представляют классические интегралы системы материальных точек с поправками на теорию относительности.

Выпишем найденные интегралы в явной форме. Мы имеем

$$W = c^2 \sum_a m_a + \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + \frac{3}{8} \sum_a m_a \frac{v_a^4}{c^2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} +$$
$$+ \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a, b \\ a \neq b}} \frac{e_a e_b (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \big(\mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)\big)\big(\mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)\big). \tag{27.21}$$

Это есть энергия системы.

Если мы положим

$$W = c^2 \sum_a m_a + E, \tag{27.22}$$

то величина E будет энергией в обычной нормировке (эта величина обращается в нуль, когда взаимные расстояния неограниченно возрастают, а скорости равны нулю). Наряду с энергией W мы будем рассматривать соответствующую массу

$$M = \frac{W}{c^2} = \sum_a m_a + \frac{E}{c^2}, \tag{27.23}$$

которую можно называть полной массой системы. Согласно определению (27.23), полная масса системы равна сумме масс покоя отдельных частиц, сложенной с той массой, которая соответствует их кинетической энергии и энергии взаимодействия.

Перейдем к остальным интегралам движения системы. Согласно (27.18), интеграл количества движения равен

$$\mathbf{P}=\sum_a m_a\mathbf{v}_a\left(1+\frac{v_a^2}{2c^2}\right)+ \\ +\frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|}\left\{\mathbf{v}_a+\frac{(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b)(\mathbf{v}_b\cdot(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b))}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|^2}\right\}. \quad (27.24)$$

Чтобы написать в явной форме интегралы движения центра инерции, положим для краткости

$$M_a^*=m_a\left(1+\frac{v_a^2}{2c^2}\right)+\frac{e_a}{2c^2}\sum_{\substack{b\\(b\neq a)}}\frac{e_b}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|}. \quad (27.25)$$

Мы будем тогда иметь

$$\mathbf{K}=\sum_a M_a^*\mathbf{r}_a-t\mathbf{P}. \quad (27.26)$$

Заметим, что

$$\sum_a M_a^*=M, \quad (27.27)$$

где под M следует разуметь выражение (27.23), взятое в том же приближении, в каком дано M_a^* (это соответствует нерелятивистскому приближению для энергии E).

Введем радиус-вектор $\mathbf{R}$ центра инерции системы по формуле

$$M\mathbf{R}=\sum_a M_a^*\mathbf{r}_a. \quad (27.28)$$

Выражение (27.26) для $\mathbf{K}$ примет вид

$$\mathbf{K}=M\mathbf{R}-t\mathbf{P}. \quad (27.29)$$

Постоянство величины $\mathbf{K}$ дает закон движения центра инерции системы.

Наконец, интегралы момента количества движения системы равны

$$\mathbf{M}=\sum_a m_a\left(1+\frac{v_a^2}{2c^2}\right)[\mathbf{r}_a\times\mathbf{v}_a]+ \\ +\frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|}\left\{[\mathbf{r}_a\times\mathbf{v}_b]-\frac{[\mathbf{r}_a\times\mathbf{r}_b](\mathbf{v}_b\cdot(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b))}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|^2}\right\}. \quad (27.30)$$