§ 28. Тензорный характер интегралов движения

Мы должны теперь исследовать, что представляют собой найденные интегралы в смысле их поведения при преобразовании Лоренца. Если бы мы наперед знали, что выражение

$$I = -\tau W + \mathbf{a}\cdot\mathbf{P} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{K}_{-} + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{M} \tag{28.01}$$

есть инвариант, то мы могли бы заключить о тензорном характере величин W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ на основании свойств параметров τ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\omega}$ бесконечно малого преобразования Лоренца. Поскольку, однако, инвариантность выражения (28.01) нами не доказана, мы изберем более прямой путь, хотя он и связан с довольно утомительными выкладками (последних мы приводить не будем). А именно, мы подвергнем величины W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ конечному преобразованию Лоренца и посмотрим, как они выражаются через первоначальные величины.

Обозначим через W', $\mathbf{P}'$, $\mathbf{K}'$, $\mathbf{M}'$ результаты подстановки в W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ величин $\mathbf{r}'_a$, $\mathbf{v}'_a$ вместо $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{v}_a$ [формулы (26.36) и (26.37)]. Мы получим

$$W' = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{V^4}{c^4}\right)W - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}), \tag{28.02}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{V}\frac{W}{c^2} + \frac{\mathbf{V}}{2c^2}\left(\mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{P} - \mathbf{V}\frac{W}{c^2}\right)\right), \tag{28.03}$$

или, если ввести полную массу M,

$$c^2M' = \left(c^2 + \frac{1}{2}V^2 + \frac{3}{8}\frac{V^4}{c^2}\right)M - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}), \tag{28.04}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{V}M + \frac{\mathbf{V}}{2c^2}\left(\mathbf{V}\cdot(\mathbf{P} - \mathbf{V}M)\right). \tag{28.05}$$

Последние формулы могут быть с той же точностью написаны в виде

$$c^2M' = \frac{c^2M - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{P})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{28.06}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{V}M + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V}\cdot(\mathbf{P} - \mathbf{V}M)\right). \tag{28.07}$$

Сравнивая эти формулы с обычными формулами преобразования Лоренца (26.27) и (26.28), мы видим, что составляющие P_x, P_y, P_z вектора $\mathbf{P}$ преобразуются, как координаты x, y, z, а полная масса M преобразуется, как время t. Это значит, что совокупность величин

$$P^0 = Mc = \frac{W}{c}; \quad P^1 = P_x, \; P^2 = P_y; \; P^3 = P_z \tag{28.08}$$

представляет контравариантный вектор. Ковариантные составляющие этого четырехмерного вектора равны

$$P_0 = Mc = \frac{W}{c}; \quad P_1 = -P_x; \quad P_2 = -P_y; \quad P_3 = -P_z. \tag{28.09}$$

Если мы будем рассматривать всю систему зарядов, как одно сложное тело, то мы должны приписать ему массу M и количество движения $\mathbf{P}$. Мы можем также приписать ему (точнее, его центру инерции) скорость

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{M} \tag{28.10}$$

и массу покоя

$$\mu = \sqrt{M^2 - \frac{P^2}{c^2}}. \tag{28.11}$$

Величина μ равна значению M' в той системе отсчета, в которой $\mathbf{P}' = 0$. На этом примере видно, что масса покоя тела зависит от его внутреннего состояния (в данном случае — от состояния движения составляющих его частиц).

Обратимся теперь к закону преобразования величин $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$. Производя ту же подстановку (26.36) и (26.37), мы получим для $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{M}'$ выражения:

$$\mathbf{K}' = \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)\mathbf{K} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{K}) - \frac{1}{c^2}[\mathbf{V}\times\mathbf{M}], \tag{28.12}$$

$$\mathbf{M}' = \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)\mathbf{M} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{M}) + \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)[\mathbf{V}\times\mathbf{K}]. \tag{28.13}$$

С той же точностью эти формулы могут быть написаны в виде

$$\mathbf{K}' = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{K}) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left\{\mathbf{K} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{K}) - \frac{1}{c^2}[\mathbf{V}\times\mathbf{M}]\right\}, \tag{28.14}$$

$$\mathbf{M}' = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{M}) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left\{\mathbf{M} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{M}) + [\mathbf{V}\times\mathbf{K}]\right\}. \tag{28.15}$$

Сравним эти формулы с законом преобразования антисимметричного тензора, причем будем иметь в виду, что в смысле трехмерного векторного анализа $\mathbf{K}$ представляет собою полярный, а $\mathbf{M}$ — аксиальный вектор. Соответствующие формулы преобразования выписаны нами в § 24 для случая тензора электромагнитного поля [формулы (24.37) и (24.38)]. Для того чтобы получить совпадение, мы должны считать, что вектор $\mathbf{M}$ преобразуется как $\mathbf{H}$, а вектор $\mathbf{K}$ как $-\frac{1}{c}\mathbf{E}$. [Другая возможность $\mathbf{M} \sim \mathbf{E}$, $\mathbf{K} \sim \frac{1}{c}\mathbf{H}$ устраняется тем, что $\mathbf{K}$ и $\mathbf{E}$

представляют полярные, а **M** и **H** — аксиальные векторы.] Таким образом, мы можем ввести антисимметричный тензор с ковариантными составляющими:

$$\left.\begin{aligned} M_{23} &= M_x; & M_{31} &= M_y; & M_{12} &= M_z, \\ M_{10} &= -cK_x; & M_{20} &= -cK_y; & M_{30} &= -cK_z, \end{aligned}\right\} \tag{28.16}$$

или, что то же, с контравариантными составляющими:

$$\left.\begin{aligned} M^{23} &= M_x; & M^{31} &= M_y; & M^{12} &= M_z, \\ M^{10} &= cK_x; & M^{20} &= cK_y; & M^{30} &= cK_z. \end{aligned}\right\} \tag{28.17}$$

Проверкой служит то, что для одной частицы

$$\left.\begin{aligned} M_x &= m\,(x^2u^3 - x^3u^2) \quad \text{и т. д.,} \\ cK_x &= m\,(x^1u^0 - x^0u^1) \quad \text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{28.18}$$

Здесь через u^0, u^1, u^2, u^3 обозначены составляющие четырехмерной скорости; для координат и времени введены обозначения с верхними значками $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ для того, чтобы подчеркнуть, что они представляют контравариантные величины.

Таким образом, мы выяснили, что из десяти интегралов движения четыре (а именно, энергия и количество движения) представляют четырехмерный вектор, а остальные шесть (интегралы центра инерции и момента количества движения) — антисимметричный тензор. Это позволяет утверждать, что если эти величины постоянны в какой-нибудь одной системе отсчета, то они будут постоянными и во всякой другой системе отсчета. То обстоятельство, что законы преобразования выведены нами из приближенных формул, связано с приближенным характером всей постановки задачи: мы уже упоминали, что, строго говоря, энергия и количество движения системы зарядов вообще не остаются постоянными, а могут тратиться на излучение.

Зная тензорный характер интегралов движения, мы можем проверить, что выражение (28.01) действительно представляет собою инвариант. Для этого достаточно переписать выражение для I в четырехмерных обозначениях. Согласно результатам § 23, мы имеем

$$\tau = \frac{1}{c}a_0; \quad a_x = -a_1; \quad a_y = -a_2; \quad a_z = -a_3, \tag{28.19}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 есть ковариантный вектор.

Далее,

$$V_x = c\omega_{10}; \quad V_y = c\omega_{20}; \quad V_z = c\omega_{30}, \tag{28.20}$$

$$\omega_x = \omega_{23}; \quad \omega_y = \omega_{31}; \quad \omega_z = \omega_{12}, \tag{28.21}$$

где ω_{ik} — ковариантные составляющие антисимметричного тензора. Пользуясь четырехмерными обозначениями (28.08) и (28.17) для интегралов движения, мы будем иметь вместо (28.01)

$$I = -a_0 P^0 - a_1 P^1 - a_2 P^2 - a_3 P^3 +$$
$$+ \omega_{10} M^{10} + \omega_{20} M^{20} + \omega_{30} M^{30} + \omega_{23} M^{23} + \omega_{31} M^{31} + \omega_{12} M^{12}, \quad (28.22)$$

или короче

$$I = -\sum_{i=0}^{3} a_i P^i + \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=0}^{3} \omega_{ik} M^{ik}, \quad (28.23)$$

что и доказывает наше утверждение об инвариантности величины I.

§ 29. Замечания по поводу обычной формулировки законов сохранения

В этом параграфе мы сделаем некоторые замечания критического характера по поводу обычной формулировки законов сохранения. Для определенности мы будем говорить о законах сохранения энергии и количества движения, так как они рассматриваются чаще всего.

Выражения для энергии (или полной массы) и для количества движения обычно пишутся в форме

$$W = Mc^2 = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}, \quad (29.01)$$

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (29.02)$$

и относительно них делаются два утверждения: во-первых, что эти величины представляют четырехмерный вектор, и, во-вторых, что они остаются постоянными.

Оба утверждения справедливы, однако, лишь в том случае, когда частицы не взаимодействуют. Но тогда скорость каждой частицы в отдельности остается постоянной, и каждая четверка величин

$$W^{(a)} = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{P}^{(a)} = \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (29.03)$$

будет представлять постоянный четырехмерный вектор. Таким образом, при отсутствии взаимодействия постоянство сумм (29.01) и (29.02) вытекает тривиальным образом из постоянства отдельных членов (29.03), и составление сумм не дает ничего нового.

При наличии же взаимодействия выражения (29.01) и (29.02) не будут постоянными и не будут представлять четырехмерного вектора.