гралов движения, мы будем иметь вместо (28.01)

$$I = -a_0P^0 - a_1P^1 - a_2P^2 - a_3P^3 +$$
$$+ \omega_{10}M^{10} + \omega_{20}M^{20} + \omega_{30}M^{30} + \omega_{23}M^{23} + \omega_{31}M^{31} + \omega_{12}M^{12}, \quad (28.22)$$

или короче

$$I = -\sum_{i=0}^{3} a_iP^i + \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=0}^{3} \omega_{ik}M^{ik}, \quad (28.23)$$

что и доказывает наше утверждение об инвариантности величины I.

§ 29. Замечания по поводу обычной формулировки законов сохранения

В этом параграфе мы сделаем некоторые замечания критического характера по поводу обычной формулировки законов сохранения. Для определенности мы будем говорить о законах сохранения энергии и количества движения, так как они рассматриваются чаще всего.

Выражения для энергии (или полной массы) и для количества движения обычно пишутся в форме

$$W = Mc^2 = \sum_a \frac{m_ac^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}}, \quad (29.01)$$

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{m_a\mathbf{v}_a}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (29.02)$$

и относительно них делаются два утверждения: во-первых, что эти величины представляют четырехмерный вектор, и, во-вторых, что они остаются постоянными.

Оба утверждения справедливы, однако, лишь в том случае, когда частицы не взаимодействуют. Но тогда скорость каждой частицы в отдельности остается постоянной, и каждая четверка величин

$$W^{(a)} = \frac{m_ac^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{P}^{(a)} = \frac{m_a\mathbf{v}_a}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (29.03)$$

будет представлять постоянный четырехмерный вектор. Таким образом, при отсутствии взаимодействия постоянство сумм (29.01) и (29.02) вытекает тривиальным образом из постоянства отдельных членов (29.03), и составление сумм не дает ничего нового.

При наличии же взаимодействия выражения (29.01) и (29.02) не будут постоянными и не будут представлять четырехмерного вектора.

Первое понятно непосредственно, так как даже в нерелятивистском приближении постоянной будет не кинетическая, а полная энергия системы частиц.

Теория относительности вносит поправки, соответствующие взаимодействию, не только в выражение для энергии, но и в выражение для количества движения системы [см. (27.21) и (27.24)]. Лишь с этими поправками оба выражения будут постоянными. Что касается векторных свойств, то на первый взгляд может показаться парадоксальным следующее обстоятельство. Как мы видели в § 25 [формулы (25.23) и (25.24)], для одной частицы совокупность четырех величин (29.03) представляет четырехмерный вектор также и в случае ускоренного движения; далее, сумма векторов есть, как будто, тоже вектор. Между тем мы утверждаем, что суммы (29.01) и (29.02) не представляют собой составляющих четырехмерного вектора. Парадокс разъясняется тем, что величины $W^{(a)}$, $\mathbf{P}^{(a)}$ являются функциями от времени, общего для всех частиц. Их суммы W, $\mathbf{P}$ представляют суммы *одновременных в данной системе отсчета* значений $W^{(a)}$, $\mathbf{P}^{(a)}$. В другой системе отсчета эти значения уже не будут одновременными. Поэтому при переходе к новой системе отсчета нужно не только составить из $W^{(a)}$, $\mathbf{P}^{(a)}$ линейные комбинации по правилам для векторов, но и пересчитать эти величины к новой одновременности (как это разъяснено в § 26). Такой пересчет не даст ничего нового лишь в случае постоянных $W^{(a)}$, $\mathbf{P}^{(a)}$; в общем же случае он требует учета изменения этих величин за время, соответствующее переходу от старой одновременности к новой (все это приближенно проделано в § 26). Поэтому ясно, что для невзаимодействующих частиц суммы $W = \sum\limits_a W^{(a)}$ и $\mathbf{P} = \sum\limits_a \mathbf{P}^{(a)}$ будут обладать векторными свойствами, а для взаимодействующих частиц они ими обладать не будут.

При наличии взаимодействия векторными свойствами и постоянством во времени будут, в рассматриваемом приближении, обладать те выражения для интегралов движения, которые выведены в § 27. Эти выражения отличаются от (29.01) и (29.02), с одной стороны, учетом членов взаимодействия и, с другой стороны, тем, что величины $\dfrac{m_a}{\sqrt{1-\dfrac{v_a^2}{c^2}}}$ заменены в них первыми членами разложения в ряд по степеням v_a^2/c^2, причем разложение доведено до членов того же порядка, какой учитывается в членах взаимодействия.

Может, однако, оказаться, что вследствие больших расстояний между частицами члены взаимодействия играют незначительную роль, но что, в то же время, скорости частиц весьма велики. В этом предельном случае весьма быстрых, слабо взаимодействующих частиц можно пользоваться выражениями (29.01) и (29.02). При этом, однако, необходимо помнить, что эти выражения применимы лишь *до начала* и *после конца* взаимодействия, тогда как в промежуточное время они не применимы.

В указанном предельном случае можно применять законы сохранения энергии и количества движения в обычной форме

$$\sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{\overset{*}{v}{}_a^2}{c^2}}}, \tag{29.04}$$

$$\sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \sum_a \frac{m_a \overset{*}{\mathbf{v}}_a}{\sqrt{1-\frac{\overset{*}{v}{}_a^2}{c^2}}}, \tag{29.05}$$

где $\mathbf{v}_a$ и $\overset{*}{\mathbf{v}}_a$ — значения скорости a-той частицы до начала и после конца взаимодействия. Из сказанного ясно, что левые части этих равенств не остаются постоянными во все время взаимодействия, но что после окончания взаимодействия они принимают первоначальное значение (то, которое они имели до его начала).

Сделанные в этом параграфе замечания в равной мере относятся и к обычной формулировке закона сохранения момента количества движения, в которой члены взаимодействия не учитываются.

§ 30. Вектор потока энергии (вектор Умова)

Рассмотрим обычные нерелятивистские уравнения движения механики сплошной среды. Они имеют вид:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{30.01}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{30.02}$$

Здесь v_1, v_2, v_3 — составляющие скорости частицы среды, ρ — плотность среды, p_{ik} — тензор *) напряжений, F_i — составляющие внешней силы, действующей на единицу массы. Входящее в левую часть (30.01) выражение для ускорения $\frac{dv}{dt}$ есть так называемая субстанциальная

*) В этом параграфе мы употребляем термины „вектор“ и „тензор“ в трехмерном их значении.