можно пользоваться выражениями (29.01) и (29.02). При этом, однако, необходимо помнить, что эти выражения применимы лишь *до начала* и *после конца* взаимодействия, тогда как в промежуточное время они не применимы.

В указанном предельном случае можно применять законы сохранения энергии и количества движения в обычной форме

$$\sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{\overset{*}{v}{}_a^2}{c^2}}}, \tag{29.04}$$

$$\sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \sum_a \frac{m_a \overset{*}{\mathbf{v}}_a}{\sqrt{1-\frac{\overset{*}{v}{}_a^2}{c^2}}}, \tag{29.05}$$

где $\mathbf{v}_a$ и $\overset{*}{\mathbf{v}}_a$ — значения скорости a-той частицы до начала и после конца взаимодействия. Из сказанного ясно, что левые части этих равенств не остаются постоянными во все время взаимодействия, но что после окончания взаимодействия они принимают первоначальное значение (то, которое они имели до его начала).

Сделанные в этом параграфе замечания в равной мере относятся и к обычной формулировке закона сохранения момента количества движения, в которой члены взаимодействия не учитываются.

§ 30. Вектор потока энергии (вектор Умова)

Рассмотрим обычные нерелятивистские уравнения движения механики сплошной среды. Они имеют вид:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{30.01}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{30.02}$$

Здесь v_1, v_2, v_3 — составляющие скорости частицы среды, ρ — плотность среды, p_{ik} — тензор *) напряжений, F_i — составляющие внешней силы, действующей на единицу массы. Входящее в левую часть (30.01) выражение для ускорения $\frac{dv}{dt}$ есть так называемая субстанциальная

*) В этом параграфе мы употребляем термины „вектор" и „тензор" в трехмерном их значении.

производная, равная

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{30.03}$$

Уравнение (30.02) принято называть уравнением неразрывности. Оно выражает, как известно, закон сохранения массы.

Система уравнений (30.01) и (30.02) сама по себе еще не является полной; она не позволяет, по заданным начальным и предельным условиям, находить движение среды. Чтобы получить полную систему уравнений, нужно, во-первых, выразить тензор напряжений через другие величины, как то: деформации, скорости, давление, температуру, электромагнитное и другие поля, и затем, если число неизвестных функций будет больше четырех [т. е. больше числа уравнений (30.01) и (30.02)], добавить к уравнениям движения ряд других уравнений, как то: уравнение состояния, уравнение притока тепла, уравнения поля и др.

В дальнейшем мы ограничимся случаем консервативной системы при отсутствии внешних сил.

Рассмотрим сперва упругую сжимаемую среду. Мы можем ввести тогда потенциальную энергию Π единицы массы среды и выразить тензор напряжений через нее. Пусть a_1, a_2, a_3 — переменные Лагранжа, в качестве которых можно взять начальные координаты частицы среды. Координаты частицы в момент времени t будут тогда

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{30.04}$$

и деформация среды будет характеризоваться совокупностью величин

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_i}{\partial a_n}. \tag{30.05}$$

Потенциальная энергия Π будет функцией от деформаций, причем, если положить

$$d\Pi = \frac{1}{2\rho} \sum_{m,n=1}^{3} P^{mn} dA_{mn} \qquad (P^{mn} = P^{nm}), \tag{30.06}$$

то составляющие тензора напряжений p_{ik} выразятся через коэффициенты P^{mn} следующим образом:

$$p_{ik} = \sum_{m,n=1}^{3} P^{mn} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_k}{\partial a_n} \qquad (p_{ik} = p_{ki}). \tag{30.07}$$

Из этих формул нетрудно вывести соотношение

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,k=1}^{3} p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{30.08}$$

В случае жидкости

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}, \tag{30.09}$$

где p — давление, так что тензор p_{ik} сводится к скаляру. В этом случае уравнение (30.08) приводится, в силу (30.02), к виду

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \tag{30.10}$$

и дает обычное выражение

$$\Pi = \int \frac{p\, d\rho}{\rho^2} = \int \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho} \tag{30.11}$$

для потенциальной энергии единицы массы жидкости. В случае бесконечно малых деформаций (обычная теория упругости) соотношение (30.08) также легко проверяется непосредственно, без перехода к переменным Лагранжа.

Интересно сопоставить соотношение (30.08) с термодинамическим тождеством

$$\rho \frac{du}{dt} = \sum_{i,\,k=1}^{3} p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \rho T \frac{d\sigma}{dt}, \tag{30.12}$$

в котором u — внутренняя энергия, σ — энтропия и T — температура. Для изотермических процессов можно положить

$$\Pi = u - T\sigma = F, \tag{30.13}$$

где F — свободная энергия, а для адиабатических

$$\Pi = u. \tag{30.14}$$

Обратимся теперь к уравнениям движения. При помощи уравнения неразрывности (30.02) можно три уравнения (30.01) написать в виде

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k - p_{ik}) = 0. \tag{30.15}$$

Подобно тому, как уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \tag{30.02}$$

выражает закон сохранения массы, уравнение (30.15) можно считать выражающим закон сохранения количества движения. В уравнении неразрывности скалярная величина ρ есть плотность массы, а вектор с составляющими ρv_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ есть плотность потока массы. Подобно этому, в уравнении (30.15) вектор ρv_i есть плотность количества движения, а тензор

$$S_{ik} = \rho v_i v_k - p_{ik} \tag{30.16}$$

есть плотность потока количества движения. При этом вектор ρv_i входит один раз как плотность потока массы и другой раз как плотность количества движения. Подобно этому, величина S_{ik} входит один раз как i-ая составляющая потока ρv_k, а другой раз как k-ая составляющая потока ρv_i (напомним, что $S_{ik} = S_{ki}$).

Мы сейчас видели, что уравнение неразрывности и уравнения движения, написанные в форме (30.02) и (30.15), могут быть истолкованы, как законы сохранения массы и количества движения. Естественно попытаться написать в аналогичном виде и закон сохранения энергии. Это было впервые сделано Умовым, который еще в 1874 г. ввел важное понятие о потоке энергии [4], [5].

Введем скалярную величину

$$S = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi \tag{30.17}$$

и вектор с составляющими

$$S_i = v_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right) - \sum_{k=1}^{3} p_{ik} v_k. \tag{30.18}$$

В этих формулах П означает попрежнему потенциальную энергию единицы массы. Очевидно, что в выражении для S первый член есть плотность кинетической энергии, а второй член — плотность потенциальной энергии. Таким образом, величина S есть объемная плотность энергии. Вектор S_i, который мы будем называть вектором Умова *), может быть истолкован, как вектор потока энергии. В самом деле, используя уравнения движения, уравнение неразрывности, а также соотношение (30.08), нетрудно проверить справедливость равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial S_i}{\partial x_i} = 0, \tag{30.19}$$

которое и можно рассматривать, как выражение закона сохранения энергии.

Заметим, что если даны уравнения движения (30.15), то лишь одно из уравнений: уравнение неразрывности (30.02) или уравнение потока энергии (30.16), будет независимым; другое получится из него и из уравнений движения. Вместо уравнения неразрывности или урав-

---

*) Рассмотренные Умовым выражения для S и S_i отличаются от приведенных здесь отсутствием членов с потенциальной энергией. Поэтому в правой части соответствующего соотношения Умова стоит не нуль, а взятое со знаком минус выражение (30.08), т. е. работа сил упругости в единице объема за единицу времени.

нения потока энергии можно взять их линейную комбинацию, рассмотрев величину $\rho + \lambda S$ и ее поток $\rho v_i + \lambda S_i$, где λ есть постоянная, имеющая размерность, обратную квадрату скорости. В следующем параграфе мы увидим, что релятивистской форме уравнений движения сплошной среды приближенно соответствует линейная комбинация указанного вида со значением постоянной λ, равным $\lambda = \frac{1}{c^2}$.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. Если задана некоторая величина (например S), то ее поток (вектор $\mathbf{S}$) определяется из соответствующего закона сохранения по заданной его расходимости. Но без наложения дополнительных условий такое определение неоднозначно. В самом деле, если уравнению вида (30.16) удовлетворяет вектор $\mathbf{S}$ (с составляющими S_i), то ему же удовлетворяет вектор $\mathbf{S} + \operatorname{curl} \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор. Тем не менее, поток *сквозь замкнутую поверхность* определяется вполне однозначно, так как для замкнутой поверхности

$$\int (\operatorname{curl} \mathbf{A})_n \, d\sigma = 0 \tag{30.20}$$

каков бы ни был вектор $\mathbf{A}$.

По своему физическому смыслу вектор потока является, однако, вполне определенной величиной. Поэтому следует ожидать, что путем наложения дополнительных условий можно и формально сделать определение его однозначным. Одним из таких условий является требование, чтобы вектор потока величины S, которая является функцией состояния системы, сам являлся функцией состояния. Это требование будет точнее формулировано и подробно обсуждено в следующем параграфе. Ему удовлетворяет в рассмотренных здесь примерах поток энергии (вектор Умова), поток массы и поток количества движения.

§ 31. Тензор массы

В предыдущем параграфе мы видели, что в случае консервативной системы обычные нерелятивистские уравнения движения сплошной среды могут быть написаны в виде равенства нулю четырех выражений, которые представляют сумму производных по координатам и по времени. Такая форма уравнений движения заставляет думать, что их релятивистским обобщением должны быть уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T^{00}}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial T^{i0}}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{31.01}$$

где T^{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ есть некоторый тензор.