нения потока энергии можно взять их линейную комбинацию, рассмотрев величину $\rho+\lambda S$ и ее поток $\rho v_i+\lambda S_i$, где λ есть постоянная, имеющая размерность, обратную квадрату скорости. В следующем параграфе мы увидим, что релятивистской форме уравнений движения сплошной среды приближенно соответствует линейная комбинация указанного вида со значением постоянной λ, равным $\lambda=\frac{1}{c^2}$.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. Если задана некоторая величина (например S), то ее поток (вектор $\mathbf{S}$) определяется из соответствующего закона сохранения по заданной его расходимости. Но без наложения дополнительных условий такое определение неоднозначно. В самом деле, если уравнению вида (30.16) удовлетворяет вектор $\mathbf{S}$ (с составляющими S_i), то ему же удовлетворяет вектор $\mathbf{S}+\operatorname{curl}\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор. Тем не менее, поток *сквозь замкнутую поверхность* определяется вполне однозначно, так как для замкнутой поверхности

$$\int(\operatorname{curl}\mathbf{A})_n\,d\sigma=0 \tag{30.20}$$

каков бы ни был вектор $\mathbf{A}$.

По своему физическому смыслу вектор потока является, однако, вполне определенной величиной. Поэтому следует ожидать, что путем наложения дополнительных условий можно и формально сделать определение его однозначным. Одним из таких условий является требование, чтобы вектор потока величины S, которая является функцией состояния системы, сам являлся функцией состояния. Это требование будет точнее формулировано и подробно обсуждено в следующем параграфе. Ему удовлетворяет в рассмотренных здесь примерах поток энергии (вектор Умова), поток массы и поток количества движения.

§ 31. Тензор массы

В предыдущем параграфе мы видели, что в случае консервативной системы обычные нерелятивистские уравнения движения сплошной среды могут быть написаны в виде равенства нулю четырех выражений, которые представляют сумму производных по координатам и по времени. Такая форма уравнений движения заставляет думать, что их релятивистским обобщением должны быть уравнения вида

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T^{00}}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k}=0,\\ \frac{\partial T^{i0}}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}=0,\end{aligned}\right\} \tag{31.01}$$

где $T^{ik}\,(i, k=0, 1, 2, 3)$ есть некоторый тензор.

Первое из этих уравнений должно выражать закон сохранения массы и энергии, а остальные три (для $i = 1, 2, 3$) — закон сохранения количества движения. Если T^{00} есть плотность всей массы (включая массу покоя и массу кинетической энергии), то cT^{0i} есть плотность потока массы. Далее, если cT^{i0} есть плотность i-той составляющей количества движения, то $c^2T^{ik}(k = 1, 2, 3)$ представляет плотность потока для этой составляющей. Масса M, заключенная в некотором объеме, и соответствующая ей энергия W выразятся через T^{00} в виде интеграла по объему:

$$M = \frac{W}{c^2} = \int T^{00}\,dV. \tag{31.02}$$

Аналогично, количество движения, заключенное в том же объеме, будет равно

$$P^i = c\int T^{i0}\,dV. \tag{31.03}$$

Уравнения (31.01) выражают тот факт, что увеличение энергии или количества движения, заключенных внутри некоторого объема, происходит только за счет притока этих величин извне (т. е. сквозь поверхность, ограничивающую этот объем). Интегралы (31.02) и (31.03), распространенные по всему объему, представляют полную массу и полное количество движения системы. Эти величины остаются постоянными (не зависят от времени t).

Кроме законов сохранения массы, энергии и количества движения, должны иметь место законы сохранения момента количества движения, а также законы движения центра инерции системы. Их можно написать в форме, аналогичной (31.01). Из уравнений (31.01) вытекают соотношения

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_0}(x_iT^{k0} - x_kT^{i0}) + \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}(x_iT^{km} - x_kT^{im}) = T^{ki} - T^{ik} \\ (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)\end{gathered}\right\}. \tag{31.04}$$

Эти соотношения будут иметь форму законов сохранения, если правая часть их обратится в нуль. Мы получаем условие

$$T^{ik} = T^{ki}, \tag{31.05}$$

согласно которому тензор T^{ik} должен быть симметричным. Это условие означает, в частности, что поток массы равен количеству движения не только для уравнений механики, но и в самом общем случае. Соотношения (31.04) для симметричного тензора мы выпишем отдельно для $k = 1, 2, 3$ и для $k = 0$.

Мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(x_i T^{k0} - x_k T^{i0}) + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}(x_i T^{km} - x_k T^{im}) = 0, \qquad (31.06)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(x_i T^{00} - x_0 T^{i0}) + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}(x_i T^{0m} - x_0 T^{im}) = 0, \qquad (31.07)$$

где i, $k = 1, 2, 3$. Формулы (31.06) можно рассматривать, как законы сохранения момента количества движения, а формулы (31.07) — как законы движения центра инерции системы (те и другие выражены в дифференциальной форме). Если проинтегрировать эти выражения по некоторому объему, получатся соответствующие интегральные соотношения.

Если интегралы

$$M^{ik} = c\int (x_i T^{k0} - x_k T^{i0})\,dV, \qquad (31.08)$$

$$K^i = \frac{1}{c} M^{i0} = \int (x_i T^{00} - x_0 T^{i0})\,dV \qquad (31.09)$$

распространить по всему объему, то они будут оставаться постоянными. При этом M^{23}, M^{31}, M^{12} будут составляющими момента количества движения системы, а деленные на c величины M^{10}, M^{20}, M^{30} можно толковать, как произведение массы системы на начальные координаты ее центра инерции.

Рассмотренный здесь тензор T^{ik} мы будем называть тензором массы *). Инвариант тензора T^{ik} имеет размерность плотности массы. Умноженный на c^2 тензор T^{ik} называют также тензором энергии; инвариант этого тензора имеет размерность плотности энергии.

Мы наложим на тензор массы еще одно условие, которое можно формулировать в виде следующего физического принципа. *Тензор массы должен быть функцией состояния системы.* Уточним, что мы разумеем под состоянием.

Допустим, что уравнения движения и уравнения поля написаны в виде системы n уравнений первого порядка для неизвестных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, причем эти уравнения могут быть решены относительно производных по времени. Задание начальных значений функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ определяет (вместе с краевыми или иными условиями) их значения во всякий последующий момент времени (принцип причинности). Тогда мы будем говорить, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ характеризуют состояние системы. Всякую функцию от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, не содержащую их производных по времени, а также не содержащую

---

*) Мы предпочитаем это название часто употребляемому названию „тензор материи". Понятие „материя" имеет весьма общий характер и его не следует отождествлять с понятием „масса".

явным образом координат, мы будем называть функцией состояния. (Заметим, что в теории относительности производные по координатам и по времени входят симметричным образом; поэтому, если некоторый скаляр, вектор или тензор не содержит производных по времени, то он не содержит также и производных по координатам).

Приведем примеры. В механике системы точек состояние характеризуется координатами и скоростями частиц; всякая функция от координат и скоростей будет функцией состояния. В гидродинамике состояние характеризуется тремя составляющими скорости, плотностью и давлением (последние две величины мы предполагаем связанными некоторым уравнением). В теории электромагнитного поля состояние характеризуется антисимметричным тензором поля.

Таким образом, наш физический принцип *) требует, чтобы составляющие тензора массы содержали только функции, характеризующие состояние системы. Они не должны содержать производных от этих функций, а также не должны содержать явным образом координат (само собою разумеется, мы имеем в виду прямоугольные составляющие).

Обратимся к вопросу о том, насколько однозначно определяется тензор массы из поставленных условий. Рассмотрим сперва уравнения, выражающие равенство нулю расходимости тензора массы,

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{31.10}$$

а также условие симметрии $T^{ik} = T^{ki}$. Кроме того, поставим условие, чтобы десять интегралов уравнений (величины W, P^i, M^{ik}) имели заданное значение.

Пусть $A^{im,\,nk}$ есть некоторый тензор четвертого ранга, обладающий следующими свойствами симметрии: антисимметрия в первой паре значков

$$A^{im,\,nk} = -A^{mi,\,nk} \tag{31.11}$$

антисимметрия во второй паре значков

$$A^{im,\,nk} = -A^{im,\,kn} \tag{31.12}$$

и циклическая симметрия

$$A^{im,\,nk} + A^{in,\,km} + A^{ik,\,mn} = 0. \tag{31.13}$$

Из этих свойств следует, что

$$A^{im,\,nk} = A^{nk,\,im}. \tag{31.14}$$

*) Этот принцип, повидимому, никем не был явным образом формулирован. Однако все применяемые формы тензора массы фактически ему удовлетворяют.

Из вторых производных тензора $A^{im,nk}$ построим тензор

$$B^{ik} = \sum_{m,n=0}^{3} \frac{\partial^2 A^{im,nk}}{\partial x_m \partial x_n}, \tag{31.15}$$

который будем называть тензором Круткова *). Нетрудно видеть, что тензор Круткова будет симметричным. Далее, в силу антисимметрии $A^{im,nk}$ в значках n, k мы имеем тождественно

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial B^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{31.16}$$

Кроме того, тензор Круткова обладает следующим свойством. Если в интегралах вида M, P^i, M^{ik}, K^i [формулы (31.02), (31.03), (31.08), (31.09)] заменить тензор T^{ik} тензором Круткова B^{ik}, то эти объемные интегралы приведутся к поверхностным. При условии, что тензор $A^{im,nk}$ и его первые производные обращаются в нуль на поверхности, ограничивающей данный объем (или, если рассматривается все пространство, достаточно быстро убывают на бесконечности), составленные из B^{ik} интегралы эти обратятся в нуль.

Пусть T^{ik} — данный тензор массы. Прибавив к нему тензор Круткова B^{ik}, мы получим новый тензор

$$\overset{*}{T}{}^{ik} = T^{ik} + B^{ik}, \tag{31.17}$$

который будет обладать следующими свойствами. Во-первых, он будет симметричным, во-вторых, в силу (31.10) и (31.16), он будет удовлетворять уравнению

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \overset{*}{T}{}^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{31.18}$$

Наконец, составленные при помощи $\overset{*}{T}{}^{ik}$ интегралы $\overset{*}{M}$, $\overset{*}{P}{}^i$, $\overset{*}{M}{}^{ik}$, $\overset{*}{K}{}^i$ будут равны таким же интегралам, составленным при помощи данного тензора T^{ik}.

Таким образом, если не принимать во внимание требования, чтобы тензор массы был функцией состояния, то тензор $\overset{*}{T}{}^{ik}$, связанный с T^{ik} формулой (31.17), будет удовлетворять всем остальным условиям.

*) В случае трех измерений обладающий указанными свойствами симметрии тензор четвертого ранга $A^{im,nk}$ сводится к симметричному тензору второго ранга с составляющими $\gamma_{11} = A^{23,23}$, $\gamma_{22} = A^{31,31}$, $\gamma_{33} = A^{12,12}$, $\gamma_{23} = A^{31,12}$, $\gamma_{31} = A^{12,23}$, $\gamma_{12} = A^{23,31}$. Тензор γ_{pq} введен и широко использован Ю. А. Крутковым в его книге [16].

Иначе говоря, при игнорировании этого требования тензор массы не определяется однозначным образом.

Однако наше требование, чтобы тензор массы был функцией состояния, совершенно меняет положение вещей, и определение тензора массы становится однозначным. В самом деле, предположим, что тензор T^{ik} есть функция состояния, так что он удовлетворяет всем поставленным условиям, включая указанное наше требование. Если даже тензор четвертого ранга $A^{im,\,nk}$ тоже есть функция состояния, то его вторые производные этим свойством обладать не будут, и прибавка их к T^{ik} недопустима.

Мы приходим к выводу, что из совокупности физических условий тензор массы определяется единственным образом *). Этот вывод становится особенно существенным в теории тяготения, так как уравнения этой теории содержат самый тензор массы, а не только его расходимость.

Когда мы писали уравнения движения в виде равенства нулю четырехмерной расходимости, мы тем самым предполагали нашу физическую систему консервативной. Сделаем одно общее замечание о системах неконсервативных.

Так как закон сохранения энергии имеет всеобщий характер, то под неконсервативными следует разуметь такие системы, в которых некоторые виды энергии (например, тепловая) явным образом не учитываются. Если имеется некоторый вид энергии, участвующий в общем балансе энергии, но не включенный в тензор T^{ik}, то расходимость этого тензора не будет равняться нулю: в уравнениях (31.01) справа будет стоять приток этого вида энергии и соответствующего количества движения в единицу объема. В дальнейшем мы будем иметь дело только с консервативными системами.

§ 32. Примеры тензора массы

Мы рассмотрим теперь явный вид тензора массы в некоторых конкретных случаях.

Мы начнем с простейшего случая „пылевидной“ материи, т. е. такой, частицы которой не взаимодействуют, причем, однако, их скорости распределены непрерывно, так что существует некоторое поле скоростей. Для тензора массы в этом случае мы введем особое обозначение Θ^{ik}. Обозначим через ρ^* инвариантную плотность массы, т. е. плотность, отнесенную к той системе отсчета, относительно которой частицы данного элемента объема в данный момент покоятся („сопутствующая“ система отсчета). Пусть u^i есть четырех-

---

*) Для ряда случаев, включая все случаи, рассмотренные в § 32 и 33, единственность тензора массы при поставленных нами условиях строго доказана В. М. Шехтером [11].