Иначе говоря, при игнорировании этого требования тензор массы не определяется однозначным образом.

Однако наше требование, чтобы тензор массы был функцией состояния, совершенно меняет положение вещей, и определение тензора массы становится однозначным. В самом деле, предположим, что тензор T^{ik} есть функция состояния, так что он удовлетворяет всем поставленным условиям, включая указанное наше требование. Если даже тензор четвертого ранга $A^{im,\,nk}$ тоже есть функция состояния, то его вторые производные этим свойством обладать не будут, и прибавка их к T^{ik} недопустима.

Мы приходим к выводу, что из совокупности физических условий тензор массы определяется единственным образом *). Этот вывод становится особенно существенным в теории тяготения, так как уравнения этой теории содержат самый тензор массы, а не только его расходимость.

Когда мы писали уравнения движения в виде равенства нулю четырехмерной расходимости, мы тем самым предполагали нашу физическую систему консервативной. Сделаем одно общее замечание о системах неконсервативных.

Так как закон сохранения энергии имеет всеобщий характер, то под неконсервативными следует разуметь такие системы, в которых некоторые виды энергии (например, тепловая) явным образом не учитываются. Если имеется некоторый вид энергии, участвующий в общем балансе энергии, но не включенный в тензор T^{ik}, то расходимость этого тензора не будет равняться нулю: в уравнениях (31.01) справа будет стоять приток этого вида энергии и соответствующего количества движения в единицу объема. В дальнейшем мы будем иметь дело только с консервативными системами.

§ 32. Примеры тензора массы

Мы рассмотрим теперь явный вид тензора массы в некоторых конкретных случаях.

Мы начнем с простейшего случая „пылевидной“ материи, т. е. такой, частицы которой не взаимодействуют, причем, однако, их скорости распределены непрерывно, так что существует некоторое поле скоростей. Для тензора массы в этом случае мы введем особое обозначение Θ^{ik}. Обозначим через ρ^* инвариантную плотность массы, т. е. плотность, отнесенную к той системе отсчета, относительно которой частицы данного элемента объема в данный момент покоятся („сопутствующая“ система отсчета). Пусть u^i есть четырех-

*) Для ряда случаев, включая все случаи, рассмотренные в § 32 и 33, единственность тензора массы при поставленных нами условиях строго доказана В. М. Шехтером [11].

мерная скорость частиц. Положим

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2}\rho^* u^i u^k. \tag{32.01}$$

По определению, Θ^{ik} есть четырехмерный контравариантный тензор. Его дважды нулевая составляющая равна

$$\Theta^{00} = \frac{1}{c^2}\rho^* (u^0)^2 = \frac{\rho^*}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{32.02}$$

Эта составляющая должна равняться плотности всей массы, включая массу кинетической энергии. Покажем, что это так и есть. Действительно, если ρ^* есть плотность массы покоя в сопутствующей системе отсчета, то плотность массы покоя в лабораторной системе отсчета (относительно которой частица движется со скоростью $\mathbf{v}$) есть

$$\rho = \frac{\rho^*}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32.03}$$

Далее, если ρ есть плотность массы покоя, то плотность всей массы (включая массу кинетической энергии) равна

$$\frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho^*}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \Theta^{00}. \tag{32.04}$$

Эта формула для плотности соответствует обычной формуле

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{32.05}$$

для массы отдельной частицы. Другие составляющие тензора массы в трехмерном написании равны

$$\Theta^{0i} = \frac{1}{c}\,\frac{\rho^* v_i}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\,\frac{\rho v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{32.06}$$

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\rho^* v_i v_k}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\rho v_i v_k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32.07}$$

Составим теперь расходимость тензора Θ^{ik}. Мы имеем

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial\Theta^{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2}u^i\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial(\rho^* u^k)}{\partial x_k} + \frac{\rho^*}{c^2}\sum_{k=0}^{3}u^k\frac{\partial u^i}{\partial x_k}. \tag{32.08}$$

Для входящих сюда сумм мы введем особые обозначения. Положим

$$Q^* = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\rho^* u^k)}{\partial x_k}, \tag{32.09}$$

$$w^i = \sum_{k=0}^{3} u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k}. \tag{32.10}$$

Эти формулы можно написать в виде

$$Q^* = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}), \tag{32.11}$$

$$w^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{du^i}{dt}, \tag{32.12}$$

где $\frac{d}{dt}$ есть субстанциальная производная. Отсюда видно, что инвариант Q^* есть увеличение массы покоя в единице жидкого объема за единицу времени *), а вектор w^i есть четырехмерное ускорение, пространственные составляющие которого совпадают, в нерелятивистском приближении, с обычным ускорением. Таким образом

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k} = \frac{Q^*}{c^2} u^i + \frac{\rho^*}{c^2} w^i. \tag{32.13}$$

В силу уравнений движения это выражение должно равняться нулю. Но мы имеем тождественно

$$\sum_{i=0}^{3} u_i u^i = c^2; \qquad \sum_{i=0}^{3} u_i w^i = 0. \tag{32.14}$$

Поэтому уравнение

$$Q^* u^i + \rho^* w^i = 0 \tag{32.15}$$

равносильно уравнениям

$$Q^* = 0; \qquad w^i = 0. \tag{32.16}$$

Первое из них представляет уравнение неразрывности, выражающее неизменность массы покоя частиц. В данном случае масса покоя частиц не меняется потому, что они не взаимодействуют и их внут-

*) Под жидким объемом мы разумеем, как принято, объем элемента жидкости, составленного из одних и тех же частиц.

ренняя энергия остается постоянной. Второе уравнение (32.16) выражает постоянство четырехмерной (а следовательно, и трехмерной) скорости. То, что не взаимодействующие частицы должны двигаться с постоянной скоростью, также является физически очевидным. Так как уравнения движения — первого порядка относительно входящих в Θ^{ik} величин ρ^* и u^i, то ясно, что тензор массы Θ^{ik} есть функция состояния. Таким образом, вид тензора массы для случая пылевидной материи может считаться установленным.

Переходим теперь к обобщению уравнений гидродинамики идеальной жидкости. В нерелятивистской теории этот случай характеризуется тем, что тензор напряжений сводится к скаляру. Это условие легко допускает релятивистское обобщение. Предположим, что умноженный на c^2 тензор массы (тензор энергии) имеет вид

$$c^2 T^{ik} = \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^i u^k - p e_k \delta_{ik}, \qquad (32.17)$$

где μ^* и p — четырехмерные скаляры, связанные соотношением

$$\mu^* = f(p). \qquad (32.18)$$

В сопутствующей системе отсчета (относительно которой скорость в данной точке в данный момент времени равна нулю) составляющая T^{00} тензора массы равна μ^*. Поэтому величина μ^* представляет плотность массы покоя жидкости. Так как жидкость предполагается упругой и может обладать потенциальной энергией сжатия, то здесь в массу покоя включена масса, соответствующая этой энергии. Поскольку энергия сжатия может меняться, масса покоя жидкого объема не будет оставаться постоянной. Имея это в виду, мы ввели для плотности полной массы покоя особое обозначение μ^*, оставляя символ ρ^* для плотности той части массы покоя, которая в ходе процесса не меняется.

Составим уравнения движения. Полагая для краткости

$$Q = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^k\right] \qquad (32.19)$$

и пользуясь введенным выше обозначением w^i для ускорения, мы будем иметь

$$c^2 \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = Q u^i + \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) w^i - e_i \frac{\partial p}{\partial x_i}. \qquad (32.20)$$

При отсутствии внешних сил это выражение равно нулю.

Используя равенства (32.14), получаем для Q второе выражение:

$$Q = \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{3} u^k \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{d\tau}, \qquad (32.21)$$

где $\frac{dp}{dt}$ — субстанциальная производная, а $d\tau$ — дифференциал собственного времени частицы. Что касается самой величины p, то из сопоставления полученных уравнений движения с нерелятивистскими легко видеть, что p есть давление. Приравнивая оба выражения для Q, получим

$$\sum_{k=0}^{3}\left\{\left(\mu^*+\frac{p}{c^2}\right)\frac{\partial u^k}{\partial x_k}+u^k\frac{\partial\mu^*}{\partial x_k}\right\}=0. \tag{32.22}$$

Так как мы предполагаем, что μ^* есть функция от p, то мы можем ввести новую величину ρ^* при помощи дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho^*}{\rho^*}=\frac{d\mu^*}{\mu^*+\frac{p}{c^2}}. \tag{32.23}$$

Постоянную интегрирования мы можем выбрать, например, так, чтобы при $p=0$ было $\rho^*=\mu^*$. Используя (32.23), мы можем предыдущее уравнение написать в виде

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho^* u^k)=0. \tag{32.24}$$

Отсюда видно, что величина ρ^* может быть истолкована, как инвариантная плотность той части массы покоя, которая во время движения не меняется. Эта величина, как и μ^*, будет функцией от p.

Положим

$$\mu^*=\rho^*\left(1+\frac{\Pi}{c^2}\right). \tag{32.25}$$

Из дифференциального соотношениямежду μ^* и ρ^* получаем

$$d\Pi=\frac{p\,d\rho^*}{\rho^{*2}}, \tag{32.26}$$

откуда

$$\Pi=\int_0^p\frac{dp}{\rho^*}-\frac{p}{\rho^*}. \tag{32.27}$$

Величина Π может быть истолкована, по аналогии с (30.11), как потенциальная энергия единицы массы жидкости (под массой мы здесь разумеем ту часть массы покоя, которая не меняется во время движения). Выражая μ^* через ρ^* и Π, мы можем написать тензор энергии в виде

$$c^2T^{ik}=\left[\rho^*+\frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi+p)\right]u^iu^k-pe_k\delta_{ik}, \tag{32.28}$$

тогда как уравнения движения напишутся:

$$\left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right] w^i = e_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\frac{dp}{d\tau} u^i. \tag{32.29}$$

Вместо уравнения для нулевой компоненты ускорения можно взять уравнение неразрывности в форме (32.24).

Заметим, что инвариант тензора массы равен

$$\sum_{i=0}^{3} e_i T^{ii} = \rho^*\left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right) - \frac{3p}{c^2} = \mu^* - \frac{3p}{c^2}. \tag{32.30}$$

Из сопоставления уравнений движения (32.29) с формулой (32.28) для T^{ik} следует, что тензор массы T^{ik} есть функция состояния, как и должно быть.

Выпишем составляющие тензора массы в нерелятивистском приближении, сохраняя, однако, в T^{00} и T^{0i} члены порядка $\frac{1}{c^2}$ по отношению к главным. В главных членах мы положим, согласно (32.03),

$$\rho^* = \rho - \frac{1}{2}\rho\frac{v^2}{c^2}, \tag{33.31}$$

где ρ — обычная плотность, удовлетворяющая уравнению неразрывности (30.02). Мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right), \\ T^{0i} &= \frac{1}{c}\rho v_i + \frac{v_i}{c^3}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi + p\right), \\ T^{ik} &= \frac{1}{c^2}(\rho v_i v_k + p\delta_{ik}). \end{aligned}\right\} \tag{32.32}$$

Сравнивая поправочные члены в T^{00} и T^{0i} со скаляром и вектором Умова (30.17) и (30.18), мы убедимся, что составляющие T^{00} и T^{0i} тензора массы могут быть написаны в виде

$$T^{00} = \rho + \frac{1}{c^2}S; \quad T^{0i} = \frac{1}{c}\rho v_i + \frac{1}{c^3}S_i. \tag{32.33}$$

Таким образом, скаляр и вектор Умова дают релятивистские поправки второго порядка к обычным выражениям для плотности массы и плотности количества движения. Что касается пространственных составляющих T^{ik}, то они пропорциональны рассмотренному в § 30 трехмерному тензору плотности потока количества движения.

Пользуясь этим, мы можем написать приближенные выражения для тензора массы также и для случая упругого тела. Мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right), \\ T^{0i} &= \frac{1}{c}\rho v_i + \frac{1}{c^3}\left\{v_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right) - \sum_{k=1}^{3} p_{ik}v_k\right\}, \\ T^{ik} &= \frac{1}{c^2}(\rho v_i v_k - p_{ik}). \end{aligned}\right\} \qquad (32.34)$$

Если положить здесь, согласно (30.09), $p_{ik} = -p\delta_{ik}$, мы вернемся к случаю идеальной жидкости.

На релятивистской формулировке теории упругости мы здесь останавливаться не будем. Сделаем только одно замечание по вопросу о возможности применения понятия абсолютно твердого тела в теории относительности. В нерелятивистской механике понятие это вводится как абстракция, согласно которой форма и размеры тела не меняются под действием каких угодно сил. В частности, толчок, сообщенный в некоторый момент одному концу абсолютно твердого тела, немедленно приводит в движение и другой конец тела. На самом же деле для физического твердого тела волна от толчка распространяется внутри тела со скоростью звука. Поэтому принимаемая абстракция содержит в себе предположение, что скорость звука можно рассматривать, как бесконечно большую *). Но очевидно, что если считать бесконечно большой скорость звука, то необходимо считать бесконечно большой и скорость света, так как она превышает скорость звука в сотни тысяч раз. Отсюда ясно, что абстракция, лежащая в основе понятия абсолютно твердого тела, применима только в нерелятивистской теории. В теории же относительности, основанной на учете факта конечной скорости распространения всякого рода действий, абстракция эта неизбежно приводит к противоречию. Таким образом, в теории относительности понятием абсолютного твердого тела пользоваться нельзя.

Это не исключает, однако, возможности применять в рассуждениях теории относительности понятие твердого масштаба. В самом деле, это понятие предполагает только существование таких твердых тел, размеры и форма которых остаются неизменными при определенных внешних условиях (отсутствие ускорений и толчков, постоянство температуры и т. п). Такие твердые масштабы с достаточной точностью реализуются существующими в природе твердыми телами, которые и могут служить эталонами длины, причем постоянство их может проверяться (как мы указывали в § 2), например, путем сравнения с длиной волны определенной спектральной линии.

---

*) К тому же выводу можно прийти, рассматривая абсолютно твердое тело, как предельный случай упругого твердого тела с бесконечно большими значениями модулей упругости.