§ 33. Тензор энергии для электромагнитного поля

В предыдущих параграфах мы рассмотрели тензор массы и пропорциональный ему тензор энергии для случая вещества, между частицами которого существует взаимодействие, передаваемое упругими силами. Мы рассмотрим теперь тензор энергии для вещества, частицы которого взаимодействуют только через посредство электромагнитного поля. Так как мы имеем здесь дело с макроскопической теорией, мы можем представлять себе это вещество в виде сплошной среды с непрерывным распределением зарядов.

Мы будем исходить из уравнений Максвелла в форме Лоренца для составляющих электрического и магнитного поля:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= F_{10}; \quad E_2 = F_{20}; \quad E_3 = F_{30}, \\ H_1 &= F_{23}; \quad H_2 = F_{31}; \quad H_3 = F_{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (33.01)$$

Как мы видели в § 24, в четырехмерной форме уравнения Максвелла имеют вид:

$$F_{ikl} \equiv \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0, \qquad (33.02)$$

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i, \qquad (33.03)$$

где

$$F^{ik} = e_i e_k F_{ik} \qquad (33.04)$$

— контравариантные составляющие антисимметричного тензора поля и четырехмерный вектор s^i имеет составляющие

$$s^0 = 4\pi\rho; \quad s^i = \frac{4\pi}{c} j_i = \frac{4\pi}{c} \rho v_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (33.05)$$

В этих формулах ρ обозначает плотность заряда, v_i — трехмерную скорость и $j_i = \rho v_i$ — плотность тока. Вводя инвариантную плотность заряда ρ^* и четырехмерную скорость u^i, можно вместо (33.05) написать

$$s^i = \frac{4\pi}{c} \rho^* u^i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (33.06)$$

В § 25 мы видели, что уравнения движения частицы с зарядом e и массой покоя m имеют вид

$$m w_i = -\frac{e}{c} \sum_{k=0}^{3} F_{ik} u^k. \qquad (33.07)$$

Справа здесь стоит сила Лоренца, действующая на заряд e. Чтобы перейти от отдельной частицы к веществу со сплошным распределением заряда и массы, мы должны ввести вместо заряда e его инвариантную плотность ρ^* и вместо массы покоя m — ее инвариантную плотность μ^*. Мы получим

$$\mu^* w_i = -\frac{\rho^*}{c} \sum_{k=0}^{3} F_{ik} u^k \tag{33.08}$$

или

$$\mu^* w_i = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k. \tag{33.09}$$

Так как мы ввели две новые функции ρ^* и μ^* (которые не обязаны быть пропорциональными друг другу), то мы должны присоединить к уравнениям движения два уравнения для этих функций. Уравнение для ρ^* содержится уже в уравнениях Максвелла и выражает закон сохранения заряда

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\rho^* u^k)}{\partial x_k} = 0. \tag{33.10}$$

Уравнение же для μ^* должно быть формулировано отдельно. Мы примем, что масса покоя частиц во время движения не меняется (это включает в себе предположение об отсутствии выделения джоулева тепла). Тогда будет

$$Q^* \equiv \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\mu^* u^k)}{\partial x_k} = 0. \tag{33.11}$$

Из уравнений движения (33.09) только три являются независимыми, так как мы имеем тождественно

$$\mu^* \sum_{i=0}^{3} u^i w_i = -\frac{\rho^*}{c} \sum_{i,\, k=0}^{3} F_{ik} u^i u^k = 0. \tag{33.12}$$

Поэтому уравнения движения (33.09) вместе с уравнением сохранения массы покоя (33.11) представляют четыре независимых уравнения. Наша задача состоит в том, чтобы написать эти уравнения в виде равенства нулю расходимости некоторого тензора. Для этого воспользуемся прежде всего формулой (32.13), согласно которой

$$\mu^* w^i + Q^* u^i = c^2 \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k}, \tag{33.13}$$

где

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2} \mu^* u^i u^k \tag{33.14}$$

[напомним, что, в отличие от (32.01), инвариантная масса покоя обозначается нами теперь через μ^*, а не через ρ^*]. С другой стороны из уравнений движения (33.09) и уравнения (33.11) мы можем составить четыре независимые комбинации

$$\mu^* w_i + Q^* u_i = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k, \tag{33.15}$$

которые, вследствие (33.12), равносильны (33.09) и (33.11). Левая часть этих уравнений (точнее, ее контравариантная форма) уже представлена нами в виде расходимости некоторого тензора. Нам остается представить в аналогичном виде и правую их часть.

Для этого рассмотрим тензор

$$U_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{3} e_m F_{im} F_{km} + \frac{1}{16\pi} e_i \delta_{ik} \sum_{m,\,n=0}^{3} F^{mn} F_{mn} \tag{33.16}$$

и обозначим взятую с обратным знаком расходимость этого тензора через f_i. Мы имеем

$$f_i = -\sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_k}. \tag{33.17}$$

Вычисляя сумму производных, мы получим, после некоторых простых преобразований:

$$f_i = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k,\,l=0} F_{ik}\frac{\partial F^{kl}}{\partial x_l} - \frac{1}{8\pi}\sum_{k,\,l=0}^{3} F^{kl} F_{ikl}, \tag{33.18}$$

где F_{ikl} есть величина (33.02). В силу уравнений Максвелла (33.02) и (33.03) это выражение равно

$$f_i = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k, \tag{33.19}$$

т. е. стоящей в правой части (33.15) плотности лоренцовой силы. Таким образом, обе части уравнений (33.15) представлены в виде расходимости. Переходя к контравариантным составляющим, мы можем уравнения

$$\mu^* w^i + Q^* u^i - f^i = 0 \tag{33.20}$$

написать в виде

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{33.21}$$

где

$$c^2 T^{ik} = c^2 \Theta^{ik} + U^{ik} \tag{33.22}$$

есть тензор энергии рассматриваемой системы, состоящей из вещества и поля. В последней формуле первое слагаемое есть тензор энергии вещества, а второе — тензор энергии поля.

Тензор T^{ik} содержит инвариантную плотность μ^*, составляющие скорости u^i и составляющие поля F_{ik}. Так как эти величины характеризуют состояние системы, то очевидно, что рассмотренный тензор массы есть функция состояния.

Рассмотрим тензор энергии поля несколько подробнее.

В трехмерных обозначениях составляющие тензора энергии электромагнитного поля имеют вид:

$$U^{00} = U_{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2), \tag{33.23}$$

$$U^{0i} = -U_{0i} = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_i, \tag{33.24}$$

$$U^{ik} = U_{ik} = -\frac{1}{4\pi}(E_i E_k + H_i H_k) + \frac{1}{8\pi}\delta_{ik}(E^2 + H^2). \tag{33.25}$$

Заметим, что инвариант тензора энергии поля равен нулю

$$\sum_{i=0}^{3} e_i U_{ii} = 0. \tag{33.26}$$

Составляющая U^{00} представляет, как всегда, плотность энергии, а умноженные на c составляющие U^{0i} — плотность потока энергии, т. е. вектор Умова. Этот вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \tag{33.27}$$

принято называть вектором Умова—Пойнтинга, или просто вектором Пойнтинга, так как Пойнтинг впервые написал соответствующие уравнениям Максвелла явные выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля.

Деленный на c^2 поток энергии данного вида равен потоку массы, соответствующей этому виду энергии, а поток массы в свою очередь равен количеству движения. Поэтому деленный на c^2 вектор Умова—Пойнтинга равен плотности электромагнитного количества движения. Тот факт, что электромагнитное поле несет с собой количество движения, проявляется в силах светового давления, которое было впервые экспериментально обнаружено в 1900 г. П. Н. Лебедевым [13]. Согласно формулам (33.25), если в электромагнитном поле находится тело, то на площадку $d\sigma$ его поверхности с нормалью по оси x_i действует сила, составляющие которой равны

$$F_k\, d\sigma = +U_{ik}\, d\sigma \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{33.28}$$

Рассмотрим абсолютно отражающее тело с плоским участком поверхности. Пусть уравнение этого участка поверхности есть $x_1 = 0$, а тело занимает область $x_1 > 0$. Предположим, что на тело падает плоская волна вида

$$\left.\begin{aligned} E_1^0 &= -\sin\vartheta f & H_1^0 &= \sin\vartheta g, \\ E_2^0 &= \cos\vartheta f & H_2^0 &= -\cos\vartheta g, \\ E_3^0 &= g & H_3^0 &= f, \end{aligned}\right\} \tag{33.29}$$

где

$$\left.\begin{aligned} f &= f\left(t - \frac{1}{c}(x_1\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta)\right), \\ g &= g\left(t - \frac{1}{c}(x_1\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta)\right). \end{aligned}\right\} \tag{33.30}$$

Добавляя к полю (33.29) отраженную волну, получаемую из предыдущих формул заменой ϑ на $\pi - \vartheta$ и g на $-g$, мы получим полное поле, удовлетворяющее предельным условиям. Значения составляющих полного поля на поверхности тела будут

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -2\sin\vartheta f & H_1 &= 0, \\ E_2 &= 0 & H_2 &= -2\cos\vartheta g, \\ E_3 &= 0 & H_3 &= 2f, \end{aligned}\right\} \tag{33.31}$$

где в функциях f и g нужно положить $x_1 = 0$. Подставляя эти значения в (33.25), получим для силы, действующей на единицу поверхности отражающего тела, выражения

$$F_1 = U_{11} = \frac{1}{2\pi}(f^2 + g^2)\cos^2\vartheta; \quad F_2 = U_{12} = 0; \quad F_3 = U_{13} = 0. \tag{33.32}$$

Таким образом, сила действует (независимо от направления падающей волны) по направлению внутренней нормали к телу и представляет, следовательно, нормальное давление (см. [12]).

Рассмотрим теперь другой случай. Пусть электромагнитное поле представляет наложение волн всевозможных направлений, распределенных равномерно. Тогда статистическое среднее значение произведений составляющих будет

$$\overline{E_i E_k} = \frac{1}{3}\overline{E^2}\delta_{ik}; \quad \overline{H_i H_k} = \frac{1}{3}\overline{H^2}\delta_{ik}. \tag{33.33}$$

Для пространственных составляющих тензора энергии мы будем тогда иметь

$$\overline{U}_{ik} = \frac{1}{24\pi}(\overline{E^2} + \overline{H^2})\delta_{ik} = \frac{1}{3}\overline{U}_{00}\delta_{ik}. \tag{33.34}$$

В этом случае электромагнитное поле производит изотропное давление, равное по величине одной трети плотности электромагнитной энергии. Это заключение имеет важное значение в теории черного излучения