ГЛАВА III

ОБЩИЙ ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 35. Допустимые преобразования координат и времени

В основу математической формулировки теории относительности мы положили уравнение фронта волны

$$(\nabla\omega)^2 \equiv \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \qquad (35.01)$$

и связанное с ним выражение для квадрата интервала

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (35.02)$$

(Здесь $(\nabla\omega)^2$ есть обозначение для стоящего в левой части уравнения фронта волны дифференциального оператора). Если мы введем наши обычные обозначения

$$x_0 = ct; \quad x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z, \qquad (35.03)$$

а также числа

$$e_0 = 1; \quad e_1 = e_2 = e_3 = -1, \qquad (35.04)$$

то выражения $(\nabla\omega)^2$ и ds^2 напишутся:

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2, \qquad (35.05)$$

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,(dx_k)^2. \qquad (35.06)$$

Мы знаем, что оба эти выражения инвариантны по отношению к преобразованию Лоренца. Если ввести новые координаты

$$x'_0 = ct'; \quad x'_1 = x'; \quad x'_2 = y'; \quad x'_3 = z', \qquad (35.07)$$

связанные со старыми преобразованием Лоренца, то будет

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_k}\right)^2, \qquad (35.08)$$

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,(dx'_k)^2. \qquad (35.09)$$

Те переменные (35.03) или (35.07), в которых выражения $(\nabla\omega)^2$ и ds^2 имеют вид (35.05) и (35.06) или (35.08) и (35.09), мы будем называть галилеевыми координатами (включая в это понятие также и время).

Предположим теперь, что x_0', x_1', x_2', x_3' попрежнему равны (35.07) (т. е. представляют галилеевы координаты), тогда как x_0, x_1, x_2, x_3 уже не равны (35.03), а являются некоторыми вспомогательными переменными, которые связаны с величинами (35.07) соотношениями

$$x_\alpha' = f_\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{35.10}$$

где f_α — произвольные функции, которые удовлетворяют лишь некоторым общим условиям. Мы предположим, что уравнения (35.10) разрешимы относительно x_0, x_1, x_2, x_3, так что их якобиан отличен от нуля

$$D = \frac{D(x_0', x_1', x_2', x_3')}{D(x_0, x_1, x_2, x_3)} \neq 0. \tag{35.11}$$

Кроме того, мы будем считать, что функции f_α имеют непрерывные производные первых трех порядков. Дальнейшие условия для f_α, вытекающие уже из физических соображений, мы рассмотрим ниже.

Производя замену переменных, мы получим для $(\nabla\omega)^2$ однородную квадратичную функцию от первых производных ω по переменным x_0, x_1, x_2, x_3, которую мы запишем в виде

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}, \tag{35.12}$$

причем

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_k'} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_k'}. \tag{35.13}$$

Аналогично, произведя замену переменных в выражении для ds^2, мы получим

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta, \tag{35.14}$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_k'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_k'}{\partial x_\beta}. \tag{35.15}$$

На основании (35.13) и (35.15) легко проверить, что

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = \mu \\ 0 & \text{при } \nu \neq \mu \end{cases} \tag{35.16}$$

Отсюда следует, что если обозначить через g определитель

$$g = \operatorname{Det} g_{\alpha\beta}, \tag{35.17}$$

то величины $g^{\alpha\beta}$ будут равны деленным на g минорам (алгебраическим дополнениям) этого определителя.

Применяя правило умножения определителей, мы получим

$$\operatorname{Det}\left(e_k \frac{\partial x'_k}{\partial x_\alpha}\right) \cdot \operatorname{Det}\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_\beta}\right) = \operatorname{Det} g_{\alpha\beta}. \tag{35.18}$$

Второй множитель здесь равен якобиану D [формула (35.11)], а вследствие того, что

$$e_0 e_1 e_2 e_3 = -1, \tag{35.19}$$

первый множитель в (35.18) равен $-D$. Следовательно,

$$g = -D^2. \tag{35.20}$$

Выбор независимых переменных x_0, x_1, x_2, x_3 целесообразно ограничить такими условиями, чтобы переменная x_0 имела (как и x'_0) характер времени, а переменные x_1, x_2, x_3 (как и x'_1, x'_2, x'_3) имели характер пространственных координат. Формулируем эти условия более точно. Будем, как и раньше, понимать под „событием" точку пространства, рассматриваемую в соответствующий момент времени (точку-мгновение). Потребуем, чтобы два события, которым соответствуют одинаковые значения пространственных координатных параметров x_1, x_2, x_3, но разные значения x_0^* и x_0^{**} временно́го параметра x_0, были *последовательными* во времени в смысле § 12. Мы знаем, что для последовательных событий квадрат интервала положителен. Если считать, что разность $x_0^{**} - x_0^*$ бесконечно мала и положить

$$x^* = x_0; \quad x^{**} = x_0 + dx_0 \tag{35.21}$$

то это должно быть справедливо и для бесконечно малого интервала ds^2. Поэтому мы должны иметь

$$ds^2 = g_{00}\, dx_0^2 > 0, \tag{35.22}$$

откуда

$$g_{00} > 0. \tag{35.23}$$

Пусть мы имеем, далее, два события, которым соответствует одно и то же значение временно́го параметра x_0, но разные значения x_1, x_2, x_3 и $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ координатных параметров. Мы потребуем, чтобы такие два события были квази-одновременными в смысле § 12. Для квази-одновременных событий величина ds^2 отрицательна, и, следовательно, должно быть

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k < 0 \tag{35.24}$$

каковы бы ни были величины dx_1, dx_2, dx_3 (не равные нулю все вместе). Отсюда следует, что квадратичная форма (35.24) должна быть определенной и отрицательной. Из алгебры известно, что необходимыми и достаточными условиями для этого являются неравенства

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0, \tag{35.25}$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \tag{35.26}$$

$$g_{11} < 0; \quad g_{22} < 0; \quad g_{33} < 0, \tag{35.27}$$

из которых, впрочем, не все независимы. Независимыми являются, например: неравенство (35.25), первое из неравенств (35.26) и первое из неравенств (35.27).

Нетрудно показать, что из наложенных на коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ условий следует [независимо от их представления в виде (35.15)], что в окрестностях каждой точки величина ds^2 может быть представлена в виде суммы одного положительного и трех отрицательных квадратов. Совокупность знаков при квадратах называют сигнатурой квадратичной формы. В нашем случае сигнатура может быть записана в виде (e_0, e_1, e_2, e_3) или $(+ - - -)$.

Из неравенств (35.25) — (35.27) следует также, в согласии (35.20), что определитель g будет всегда отрицательным. Кроме того, из них вытекают такие же неравенства для величин $g^{\alpha\beta}$ с верхними значками, в силу которых будет

$$g^{00} > 0, \tag{35.28}$$

$$\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik}\omega_i\omega_k < 0 \tag{35.29}$$

для любых неравных одновременно нулю величин ω_1, ω_2, ω_3. На доказательстве этих чисто алгебраических утверждений мы останавливаться не будем.

Таким образом, для того, чтобы параметр x_0 имел характер времени, а параметры x_1, x_2, x_3 — характер пространственных координат, необходимо и достаточно, чтобы величина g_{00} была положительной, а квадратичная форма с коэффициентами g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ была определенной отрицательной. На величины же g_{10}, g_{20}, g_{30} не налагается при этом никаких ограничений.

Рассмотрим геометрический смысл уравнений $x_0 = \text{const}$ и $x_k = \text{const}$. Выведем условие, при котором уравнение

$$\omega(x, y, z, t) = 0 \tag{35.30}$$

может рассматриваться, как уравнение движущейся поверхности. Из (35.30) следует, что дифференциалы координат и времени связаны соотношением

$$\omega_x\,dx + \omega_y\,dy + \omega_z\,dz + \omega_t\,dt = 0, \tag{35.31}$$

где через ω_x, ω_y, ω_z, ω_t обозначены производные от ω по x, y, z, t. Возьмем смещение dx, dy, dz по направлению нормали к поверхности и положим

$$dx = \frac{\omega_x}{|\operatorname{grad}\omega|}\,dn; \quad dy = \frac{\omega_y}{|\operatorname{grad}\omega|}\,dn; \quad dz = \frac{\omega_z}{|\operatorname{grad}\omega|}\,dn, \tag{35.32}$$

причем $|dn|$ — абсолютная величина смещения. Подставляя (35.32) в (35.31), получим

$$|\operatorname{grad}\omega|\,dn + \omega_t\,dt = 0, \tag{35.33}$$

и, следовательно, квадрат скорости смещения

$$v^2 = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \tag{35.34}$$

будет равен

$$v^2 = \frac{\omega_t^2}{(\operatorname{grad}\omega)^2}. \tag{35.35}$$

Таким образом, уравнение (35.30) можно толковать, как уравнение поверхности, каждая точка которой движется в направлении нормали к поверхности со скоростью, определяемой из (35.35). Такое толкование, однако, возможно лишь до тех пор, пока эта скорость не превышает скорости света. Согласно (35.35) и (35.01), это будет при условии

$$(\nabla\omega)^2 \leqslant 0, \tag{35.36}$$

причем знак равенства соответствует скорости света.

Если же

$$(\nabla\omega)^2 > 0, \tag{35.37}$$

то уравнение (35.30) может быть решено относительно времени и записано в виде

$$t = \frac{1}{c} f(x, y, z), \tag{35.38}$$

причем

$$(\operatorname{grad} f)^2 < 1. \tag{35.39}$$

Уравнение (35.38) сопоставляет каждой точке пространства определенный момент времени, причем все эти „точки-мгновения" будут квази-одновременными. Это уравнение можно назвать „уравнением времени". Напомним, что уравнение времени уже рассматривалось нами в § 3 в связи с вопросом о характеристиках уравнений Максвелла.

Как мы уже отмечали в § 3, можно рассматривать уравнение $\omega = 0$, как уравнение гиперповерхности в четырехмерном многообразии пространства и времени. При таком рассмотрении можно подразделить гиперповерхности на два класса.

Если $(\nabla\omega)^2 < 0$, то можно сказать, что одно из измерений гиперповерхности имеет характер времени (часто пользуются неточным выражением: „поверхность имеет характер времени"). Согласно (35.35), это есть обыкновенная двухмерная поверхность *), движущаяся со скоростью, меньшей скорости света.

Если $(\nabla\omega)^2 > 0$, то говорят, что гиперповерхность имеет пространственный характер. Это есть все бесконечное пространство, разные точки которого рассматриваются в разные моменты времени, а именно, точка x, y, z рассматривается в момент t, определяемый из уравнения времени (т. е. из уравнения гиперповерхности). Сопоставляемые двум точкам пространства моменты времени должны быть при этом настолько близки, чтобы соответствующий интервал имел пространственный характер.

Пользуясь тем, что $(\nabla\omega)^2$ есть инвариант, мы получим, полагая последовательно $\omega = x_0$, $\omega = x_1$, $\omega = x_2$, $\omega = x_3$:

$$(\nabla x_0)^2 = g^{00} > 0, \tag{35.40}$$

$$(\nabla x_1)^2 = g^{11} < 0; \quad (\nabla x_2)^2 = g^{22} < 0; \quad (\nabla x_3)^2 = g^{33} < 0. \tag{35.41}$$

Отсюда следует, что уравнение $x_0 = \mathrm{const}$ представляет уравнение времени, а каждое из уравнений $x_k = \mathrm{const}$ $(k = 1, 2, 3)$ представляет уравнение поверхности, движущейся в направлении своей нормали со скоростью, меньшей скорости света (уравнение движущейся координатной поверхности).

Из условий, наложенных нами на преобразования координат и времени, вытекает также, что постоянным значениям x_1, x_2, x_3 соответствует, в любой инерциальной системе отсчета, движение точки со скоростью, меньшей скорости света.

В классической механике Ньютона часто применяются преобразования координат, зависящие от времени, причем эти преобразования толкуются, как переход к движущейся системе отсчета. Сравнивая преобразования координат в механике Ньютона с преобразованиями координат и времени в теории относительности, необходимо отметить следующее. Во-первых, само понятие о системе отсчета в механике Ньютона не совпадает (в общем случае ускоренного движения) с понятием системы отсчета в теории относительности: в механике Ньютона понятие системы отсчета связывается с представлением об абсолютно твердом теле и о мгновенном распространении света. В теории же относительности понятие о твердом теле (притом не абсолютно

*) В четырехмерном многообразии гиперповерхность имеет три измерения, но в данном случае только два из них — пространственные.

твердом, а лишь сохраняющем свою форму при отсутствии ускорений и внешних сил) играет лишь вспомогательную роль, а понятие системы отсчета основано на законе распространения фронта волны. Прототипом ньютоновой системы отсчета является твердый каркас, тогда как прототипом системы отсчета теории относительности является радиолокационная установка. Во-вторых, класс преобразований, допустимых в ньютоновой механике, значительно шире, чем класс преобразований, допустимых в теории относительности: в ньютоновой механике не рассматриваются ограничения, вытекающие из существования предельной скорости и выражаемые рассмотренными выше неравенствами.

В качестве примера рассмотрим преобразование, которое в ньютоновой механике может быть истолковано, как переход к равноускоренной системе отсчета. Пусть x', y', z', t' — координаты и время в инерциальной системе отсчета (галилеевы координаты). Положим

$$x' = x - \frac{1}{2} at^2; \quad y' = y; \quad z' = z \tag{35.42}$$

и, кроме того,

$$t' = t - \frac{a}{c^2} tx. \tag{35.43}$$

Переменные x, y, z, t можно толковать, как координаты и время в некоторой ускоренной системе отсчета (в смысле ньютоновой механики и в соответствующем ей приближении). Подставляя (35.42) и (35.43) в выражение для ds^2, получим

$$ds^2 = (c^2 - 2ax - a^2t^2)\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \frac{a^2}{c^2}(x\, dt + t\, dx)^2. \tag{35.44}$$

Неравенства для коэффициентов будут выполнены при условиях

$$1 - \frac{a^2t^2}{c^2} > 0; \quad \left(1 - \frac{ax}{c^2}\right)^2 - \frac{a^2t^2}{c^2} > 0. \tag{35.45}$$

Кроме того, можно потребовать, чтобы было

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{ax}{c^2} > 0. \tag{35.46}$$

Эти неравенства показывают, что подстановка (35.42)—(35.43) допустима не во всем пространстве и лишь для ограниченного промежутка времени.

Другим примером может служить преобразование, аналогичное переходу к равномерно вращающейся системе отсчета. Положим

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t; & z' &= z, \\ y' &= -x \sin \omega t + y \cos \omega t; & t' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{35.47}$$

Мы получим тогда

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2 (x^2 + y^2)]\, dt^2 - 2\omega (y\, dx - x\, dy)\, dt - \\ - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{35.48}$$

Условие для коэффициентов требует

$$c^2 - \omega^2 (x^2 + y^2) > 0. \tag{35.49}$$

Оно выполняется на ограниченных расстояниях от оси вращения, где линейная скорость вращения не превышает скорости света.

Подчеркнем еще раз, что приведенные примеры имеют физический смысл лишь в той области, где применима ньютонова механика (см. также § 61).

Само собою разумеется, что к числу допустимых преобразований относится введение обычных криволинейных координат. Поскольку такие преобразования не содержат времени, они имеют тот же геометрический смысл, как в нерелятивистской теории, почему мы на них останавливаться не будем.

§ 36. Общий тензорный анализ и обобщенная геометрия

В предыдущем параграфе мы рассматривали выражения

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{\alpha,\, \beta = 0}^{3} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}, \tag{36.01}$$

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\, \beta = 0}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta, \tag{36.02}$$

полученные из обычных выражений теории относительности введением вместо координат и времени x, y, z, t новых переменных x_1, x_2, x_3, x_0. Мы установили условия, при выполнении которых переменная x_0 может характеризовать последовательность событий во времени, а переменные x_1, x_2, x_3 — положение их в пространстве.

Само по себе введение новых переменных, разумеется, никак не может повлиять на физические следствия из теории, а является лишь математическим приемом. Однако разработка аппарата, позволяющего составлять уравнения математической физики (например, уравнения движения и уравнения поля) сразу для произвольных независимых переменных, минуя декартовы координаты и время, не только весьма полезна в вычислительном отношении (как прием, сокращающий выкладки), но и важна в принципиальном отношении. Наличие такого аппарата может указать путь к обобщению физической теории.

Уравнения, справедливые при произвольном выборе независимых переменных, мы будем называть обще-ковариантными. Самый же аппарат, позволяющий составлять обще-ковариантные тензорные уравнения, мы будем называть общим тензорным анализом.