Мы получим тогда

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2(x^2 + y^2)]\,dt^2 - 2\omega(y\,dx - x\,dy)\,dt - \\ - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{35.48}$$

Условие для коэффициентов требует

$$c^2 - \omega^2(x^2 + y^2) > 0. \tag{35.49}$$

Оно выполняется на ограниченных расстояниях от оси вращения, где линейная скорость вращения не превышает скорости света.

Подчеркнем еще раз, что приведенные примеры имеют физический смысл лишь в той области, где применима ньютонова механика (см. также § 61).

Само собою разумеется, что к числу допустимых преобразований относится введение обычных криволинейных координат. Поскольку такие преобразования не содержат времени, они имеют тот же геометрический смысл, как в нерелятивистской теории, почему мы на них останавливаться не будем.

§ 36. Общий тензорный анализ и обобщенная геометрия

В предыдущем параграфе мы рассматривали выражения

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}, \tag{36.01}$$

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta, \tag{36.02}$$

полученные из обычных выражений теории относительности введением вместо координат и времени x, y, z, t новых переменных x_1, x_2, x_3, x_0. Мы установили условия, при выполнении которых переменная x_0 может характеризовать последовательность событий во времени, а переменные x_1, x_2, x_3 — положение их в пространстве.

Само по себе введение новых переменных, разумеется, никак не может повлиять на физические следствия из теории, а является лишь математическим приемом. Однако разработка аппарата, позволяющего составлять уравнения математической физики (например, уравнения движения и уравнения поля) сразу для произвольных независимых переменных, минуя декартовы координаты и время, не только весьма полезна в вычислительном отношении (как прием, сокращающий выкладки), но и важна в принципиальном отношении. Наличие такого аппарата может указать путь к обобщению физической теории.

Уравнения, справедливые при произвольном выборе независимых переменных, мы будем называть обще-ковариантными. Самый же аппарат, позволяющий составлять обще-ковариантные тензорные уравнения, мы будем называть общим тензорным анализом.

Обще-ковариантные уравнения применяются уже в ньютоновой механике. Мы имеем в виду уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение системы материальных точек в обобщенных координатах, а также их обобщения для сплошной среды. Не давая ничего физически нового по сравнению с уравнениями в декартовых координатах, уравнения Лагранжа играют, тем не менее, важную роль как в практических применениях, так и в теоретических исследованиях. В теории относительности общий тензорный анализ преследует аналогичную цель.

В общем тензорном анализе исходными являются выражения (36.01) и (36.02) для квадрата четырехмерного градиента и для квадрата интервала. Эти выражения характеризуют, как говорят, *мероопределение* или *метрику* пространства-времени. Коэффициенты $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в них рассматриваются, как функции от переменных x_0, x_1, x_2, x_3.

Если, как мы это до сих пор предполагали, выражения (36.01) и (36.02) получены из (35.01) и (35.02) [или из (35.08) и (35.09)] введением новых переменных, то коэффициенты $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в них представимы в виде (35.13) и (35.15). Другими словами, в этом случае десять коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ выражаются через четыре функции f_0, f_1, f_2, f_3 по формуле

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f_k}{\partial x_\beta}. \tag{36.03}$$

Через те же четыре функции выражаются, вследствие соотношений (35.16), и коэффициенты $g^{\alpha\beta}$.

Существенно, однако, отметить, что формулы общего тензорного анализа почти не усложняются и в том случае, когда предположение о представимости $g_{\alpha\beta}$ в виде (36.03) не делается, а эти величины рассматриваются, как заданные функции от координат (т. е. от переменных x_0, x_1, x_2, x_3). Этой более общей точке зрения соответствует введение для пространства и времени неевклидовой геометрии и неевклидовой метрики. Такой шаг означает уже выход за пределы обычной (так называемой „частной“) теории относительности и связан с построением новой физической теории — теории тяготения Эйнштейна. Этой теории будут посвящены следующие главы этой книги. В настоящей же главе мы встанем на чисто формальную точку зрения и будем развивать общий тензорный анализ в предположении, что метрика нам задана и что величины $g_{\alpha\beta}$ представляют известные функции от координат. Такое изложение представляет преимущество в двух отношениях. Во-первых, мы можем найти те условия, которым должны удовлетворять величины $g_{\alpha\beta}$ для того, чтобы они были представимы в виде (36.03); мы получим тогда обще-ковариантную формулировку обычной теории относительности. Во-вторых, общий тензорный анализ дает нам готовый математический аппарат для формулировки теории тяготения Эйнштейна.

Прежде чем переходить к систематическому изложению тензорного анализа, установим связь между выражениями $(\nabla\omega)^2$ и ds^2, существующую при условии

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\nu} \tag{36.04}$$

независимо от представимости $g_{\alpha\beta}$ в виде (36.03). Покажем, что если функция $\omega(x_0, x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет уравнению $(\nabla\omega)^2 = 0$, то дифференциалы координат, связанных соотношением $\omega = \mathrm{const}$, удовлетворяют уравнению $ds^2 = 0$.

Положив

$$\omega_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{36.05}$$

напишем уравнение $(\nabla\omega)^2 = 0$ в виде

$$G \equiv \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta = 0. \tag{36.06}$$

Это уравнение в частных производных для ω того же типа, как уравнение Гамильтона — Якоби классической механики, и может быть решено аналогичным способом. Если написать его в виде, решенном относительно ω_0:

$$\omega_0 = -H(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3), \tag{36.07}$$

то функция H будет соответствующей функцией Гамильтона, и уравнения Гамильтона напишутся

$$\frac{dx_k}{dx_0} = \frac{\partial H}{\partial\omega_k}; \quad \frac{d\omega_k}{dx_0} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{36.08}$$

Но

$$\frac{\partial H}{\partial\omega_k} = -\frac{\partial\omega_0}{\partial\omega_k} = \left(\frac{\partial G}{\partial\omega_k}\right)\Big/\left(\frac{\partial G}{\partial\omega_0}\right), \tag{36.09}$$

и из первых трех уравнений (36.08) следует, что дифференциалы dx_α $(\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ будут пропорциональны частным производным от G по ω_α. Обозначая бесконечно малый коэффициент пропорциональности через $\frac{1}{2}\,dp$, будем иметь

$$dx_\alpha = \frac{dp}{2}\,\frac{\partial G}{\partial\omega_\alpha} = dp\sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\omega_\beta. \tag{36.10}$$

Решая при помощи (36.04) уравнения (36.10) относительно ω_α, получим

$$\omega_\alpha\,dp = \sum_{\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\,dx_\beta, \tag{36.11}$$

после чего очевидное равенство

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \omega_\alpha \, dx_\alpha = 0 \tag{36.12}$$

дает

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta = 0, \tag{36.13}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, если мы будем попрежнему рассматривать $(\nabla\omega)^2 = 0$, как уравнение фронта волны, то мы можем утверждать, что для точек, находящихся на фронте волны, дифференциалы координат и времени связаны соотношением $ds^2 = 0$.

В дальнейшем мы будем считать величины $g^{\alpha\beta}$ заданными функциями переменных x_0, x_1, x_2, x_3, и будем лишь предполагать, что они обладают непрерывными производными всех рассматриваемых порядков и удовлетворяют неравенствам, формулированным в § 35. Наряду с функциями $g_{\alpha\beta}$ мы будем рассматривать функции $g^{\alpha\beta}$, связанные с первыми соотношениями (36.04). Условия представимости $g_{\alpha\beta}$ в виде (36.03) будут установлены в дальнейшем (§ 42).

§ 37. Определение вектора и тензора. Тензорная алгебра

В тензорном анализе постоянно приходится иметь дело с суммами, подобными (36.01) и (36.02), в которых значок суммирования входит два раза. Следуя предложению Эйнштейна, мы введем для этих сумм сокращенное обозначение, которое заключается в том, что знак суммы опускается, а суммирование по дважды входящему значку подразумевается. При этом мы условимся суммировать по греческим значкам α, β, ... в пределах от 0 до 3, а по латинским значкам i, k, ... — от 1 до 3. Применяя эти обозначения, мы можем писать, например, вместо

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta \tag{37.01}$$

просто

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta \tag{37.02}$$

или же, если мы хотим выделить координату *) x_0,

$$ds^2 = g_{00} \, dx_0^2 + 2g_{0i} \, dx_0 \, dx_i + g_{ik} \, dx_i \, dx_k. \tag{37.03}$$

Эти сокращенные обозначения оказываются очень удобными и не приводят к недоразумениям. В тех редких случаях, когда суммиро-

---

*) Для единообразия мы будем называть здесь координатами все четыре переменные x_0, x_1, x_2, x_3, несмотря на то, что x_0 имеет характер времени, а не пространственной координаты. В аналогичном смысле употребляется термин „галилеевы координаты“.