после чего очевидное равенство

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \omega_\alpha \, dx_\alpha = 0 \tag{36.12}$$

дает

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta = 0, \tag{36.13}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, если мы будем попрежнему рассматривать $(\nabla\omega)^2 = 0$, как уравнение фронта волны, то мы можем утверждать, что для точек, находящихся на фронте волны, дифференциалы координат и времени связаны соотношением $ds^2 = 0$.

В дальнейшем мы будем считать величины $g^{\alpha\beta}$ заданными функциями переменных x_0, x_1, x_2, x_3, и будем лишь предполагать, что они обладают непрерывными производными всех рассматриваемых порядков и удовлетворяют неравенствам, формулированным в § 35. Наряду с функциями $g_{\alpha\beta}$ мы будем рассматривать функции $g^{\alpha\beta}$, связанные с первыми соотношениями (36.04). Условия представимости $g_{\alpha\beta}$ в виде (36.03) будут установлены в дальнейшем (§ 42).

§ 37. Определение вектора и тензора. Тензорная алгебра

В тензорном анализе постоянно приходится иметь дело с суммами, подобными (36.01) и (36.02), в которых значок суммирования входит два раза. Следуя предложению Эйнштейна, мы введем для этих сумм сокращенное обозначение, которое заключается в том, что знак суммы опускается, а суммирование по дважды входящему значку подразумевается. При этом мы условимся суммировать по греческим значкам α, β, ... в пределах от 0 до 3, а по латинским значкам i, k, ... — от 1 до 3. Применяя эти обозначения, мы можем писать, например, вместо

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta \tag{37.01}$$

просто

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta \tag{37.02}$$

или же, если мы хотим выделить координату *) x_0,

$$ds^2 = g_{00} \, dx_0^2 + 2g_{0i} \, dx_0 \, dx_i + g_{ik} \, dx_i \, dx_k. \tag{37.03}$$

Эти сокращенные обозначения оказываются очень удобными и не приводят к недоразумениям. В тех редких случаях, когда суммиро-

---

*) Для единообразия мы будем называть здесь координатами все четыре переменные x_0, x_1, x_2, x_3, несмотря на то, что x_0 имеет характер времени, а не пространственной координаты. В аналогичном смысле употребляется термин „галилеевы координаты“.

вание по дважды входящему значку не производится, мы будем это специально оговаривать. Например, в том частном случае, когда выражение (36.02) сводится к

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \tag{37.04}$$

мы будем писать

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad \text{(без суммирования)}. \tag{37.05}$$

Определение ковариантного и контравариантного векторов было дано нами для случая (37.05) в § 20. Формулы (20.12) и (20.13), которые мы теперь можем писать в виде

$$A'_\alpha = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} A_\beta, \tag{37.06}$$

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} A^\beta, \tag{37.07}$$

могут служить определением вектора и в общем случае. Как и раньше, ковариантные векторы будут обозначаться буквами с нижними значками, а контравариантные — буквами с верхними значками. При этом для дифференциалов координат мы будем делать исключение и писать их в виде dx_α, несмотря на то, что они представляют контравариантный вектор.

Таким образом, ковариантный вектор может быть определен, как совокупность четырех величин, преобразующихся, как частные производные от некоторой функции по координатам. Аналогично, контравариантный вектор представляет совокупность четырех величин, преобразующихся, как дифференциалы координат.

В том случае, когда ds^2 имеет вид (37.04) и когда мы имеем дело лишь с преобразованиями Лоренца, коэффициенты в формулах преобразования (37.06) и (37.07) постоянны. В общем же случае произвольных преобразований эти коэффициенты переменны. В случае преобразований Лоренца вектор не обязательно должен относиться к определенной точке пространства, а может быть „свободным". Примером свободного вектора является вектор энергии — количества движения материальной системы. (Аналогично, свободным тензором является тензор момента количества движения и центра инерции системы). Напротив того, в случае общих преобразований координат (и даже при простом переходе к криволинейным координатам) вектор непременно предполагается связанным с определенной точкой пространства. Такими связанными векторами являются векторы поля (например, поля скоростей сплошной среды), составляющие которых являются функциями точки, т. е. функциями от координат x_0, x_1, x_2, x_3. Но связанный вектор не обязательно должен быть определен в некоторой конечной области пространства-времени; область его определения может сводиться и к некоторой кривой (например, вектор касательной) или к некоторой поверхности (например, вектор нормали). Те же замечания относятся и к тензорам. Таким образом, в общем тензорном анализе мы будем иметь дело со связанными векторами и тензорами. Для них значения переменных коэффициентов преобразования $\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$ и т. д. должны быть взяты в той точке, к которой отнесены и самые вектор или тензор.

Определение тензора аналогично тому, какое было дано в § 21 для случая преобразований Лоренца. Формулы (21.01), (21.03) и (21.05), дающие правила преобразования ковариантного, контравариантного и смешанного тензоров второго ранга, остаются в силе и в общем тензорном анализе. В принятых нами обозначениях эти формулы напишутся

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T_{\alpha\beta}, \tag{37.08}$$

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} T^{\alpha\beta}, \tag{37.09}$$

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T^{\alpha}_{\beta}. \tag{37.10}$$

Таким образом, тензором второго ранга (ковариантным, контравариантным и смешанным) называется совокупность величин, преобразующихся, соответственно, по закону (37.08), (37.09) и (37.10).

Свойства симметрии или антисимметрии тензора второго ранга (ковариантного или контравариантного, но не смешанного) при преобразовании сохраняются. В самом деле, изменив в (37.08) обозначения значков, мы можем написать

$$T'_{\nu\mu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T_{\beta\alpha}. \tag{37.11}$$

Поэтому, если мы положим

$$2S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}, \tag{37.12}$$

$$2A_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}, \tag{37.13}$$

и аналогичным образом определим $S'_{\mu\nu}$ и $A'_{\mu\nu}$, то мы будем иметь

$$S'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} S_{\alpha\beta}, \tag{37.14}$$

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}. \tag{37.15}$$

Величины $S_{\alpha\beta}$ можно назвать симметричной, а величины $A_{\alpha\beta}$ — антисимметричной частью тензора $T_{\alpha\beta}$. Из формул (37.14) и (37.15) следует, что как симметричная, так и антисимметричная часть тензора $T_{\alpha\beta}$ представляет собою тензор. Поэтому, если тензор $T_{\alpha\beta}$ сам симметричен, так что $A_{\alpha\beta}=0$, то будет и $A'_{\mu\nu}=0$, т. е. преобразованный тензор $T'_{\mu\nu}$ также будет симметричен. Аналогично, если тензор $T_{\alpha\beta}$ антисимметричен и $S_{\alpha\beta}=0$, то будет и $S'_{\mu\nu}=0$, так что преобразованный тензор $T'_{\mu\nu}$ останется антисимметричным. Те же рассуждения могут быть применены к контравариантному тензору $T^{\alpha\beta}$. Что касается смешанного тензора T^{α}_{β}, то его верхний и нижний значки входят в формулу преобразования (37.10) неодинаковым образом, вследствие чего разделение его на симметричную и антисимметричную часть не имеет инвариантного смысла.

Весьма важным примером симметричного тензора второго ранга является совокупность коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ в выражении для ds^2. То, что коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ симметричны относительно своих значков, вытекает непосредственно из их определения. То, что они образуют тензор, вытекает из инвариантности выражения для ds^2. В самом деле, мы имеем при переходе к новым переменным x'_0, x'_1, x'_2, x'_3

$$g'_{\mu\nu}\,dx'_\mu\,dx'_\nu = g_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta, \tag{37.16}$$

откуда

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\cdot\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}, \tag{37.17}$$

а это есть закон преобразования ковариантного тензора. Тензор $g_{\alpha\beta}$ называется фундаментальным или метрическим тензором.

Совокупность величин $g^{\alpha\beta}$, определяемых из уравнений

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}, \tag{37.18}$$

также представляет собою тензор, причем этот тензор будет контравариантным. Докажем это. В штрихованной системе отсчета мы имеем для $g'_{\mu\nu}$ выражение (37.17), а $g'^{\mu\nu}$ получается из уравнений

$$g'^{\mu\lambda}g'_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{37.19}$$

С другой стороны, если $g^{\alpha\beta}$ есть контравариантный тензор, то мы должны иметь

$$g'^{\mu\lambda} = g^{\alpha\beta}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\beta}. \tag{37.20}$$

Нам нужно показать, что оба определения $g'^{\mu\lambda}$ совпадают. Так как решение уравнений (37.19) относительно $g'^{\mu\lambda}$ единственно, то для этого достаточно проверить, что выражения (37.20) удовлетворяют уравнениям (37.19). Это легко сделать, исходя из равенств:

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\rho}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\rho}=\delta^\alpha_\rho, \tag{37.21}$$

$$g'_{\lambda\nu}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\rho}=g_{\rho\sigma}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}. \tag{37.22}$$

Подставляя (37.20) в (37.19) и пользуясь сперва (37.22) и затем (37.18), мы получим цепь равенств

$$g'^{\mu\lambda}g'_{\lambda\nu}=g^{\alpha\beta}g'_{\lambda\nu}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\beta}=g^{\alpha\beta}g_{\beta\sigma}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}=$$

$$=\delta^\alpha_\sigma\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}=\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}=\delta^\mu_\nu, \tag{37.23}$$

которая и приводит к равенству (37.19).

Величины $g^{\alpha\beta}$ называются контравариантными компонентами фундаментального тензора, тогда как $g_{\alpha\beta}$ являются его ковариантными компонентами.

Использованное в (37.23) равенство

$$\delta^\alpha_\sigma\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}=\delta^\mu_\nu \tag{37.24}$$

показывает, что совокупность величин

$$\delta^\mu_\nu=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \mu=\nu,\\ 0 & \text{при} \quad \mu\neq\nu,\end{cases} \tag{37.25}$$

одинаковая во всех координатных системах, подходит под определение смешанного тензора второго ранга.

Если дан ковариантный вектор A_ν, то совокупность величин

$$A^\mu=g^{\mu\nu}A_\nu \tag{37.26}$$

будет, как легко проверить, преобразовываться, как контравариантный вектор. Эти два вектора мы не будем считать существенно различными, а будем говорить о величинах A_ν и A^μ, как о ковариантных и контравариантных компонентах одного и того же вектора. Операцию, выражаемую равенством (37.26), называют для краткости поднятием значка у вектора A_ν, а обратная операция

$$A_\nu=g_{\nu\mu}A^\mu \tag{37.27}$$

называется опусканием значка. Поднятие и опускание значков можно производить также у тензоров. Например, из ковариантного тензора $T_{\mu\nu}$

можно путем поднятия значков составить контравариантный тензор

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}, \tag{37.28}$$

из которого, обратно, исходный тензор получается по формуле

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}. \tag{37.29}$$

При этом, очевидно, свойство симметрии или антисимметрии тензора сохраняется. При составлении смешанного тензора нужно обращать внимание на то, какой именно значок поднимается (или опускается). Для ясности можно место поднятого или опущенного значка обозначать точкой. Например тензоры

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} \tag{37.30}$$

и

$$T^{\cdot\mu}_{\nu\cdot} = g^{\mu\alpha} T_{\nu\alpha} \tag{37.31}$$

будут совпадать только если тензор $T_{\alpha\beta}$ симметричен. В этом случае можно точек и не ставить, а писать просто

$$T^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\nu\alpha}. \tag{37.32}$$

Для простоты письма мы рассматривали до сих пор только векторы и тензоры второго ранга. Аналогичное определение можно дать и тензорам более высокого ранга.

Ковариантным тензором ранга n называется совокупность величин, преобразующихся по закону

$$A'_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n} = A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial x'_{\beta_1}} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial x'_{\beta_2}} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial x'_{\beta_n}}. \tag{37.33}$$

Аналогично, контравариантным тензором ранга n называется совокупность величин, преобразующихся по закону:

$$B'^{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n} = B^{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n} \frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial x_{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\beta_n}}{\partial x_{\alpha_n}}. \tag{37.34}$$

Наконец, смешанный тензор ранга n, имеющий k ковариантных и m контравариантных значков (причем $k+m=n$), есть совокупность величин, преобразующихся по закону

$$C'^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_k} = C^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_k} \frac{\partial x'_{\mu_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\mu_m}}{\partial x_{\alpha_m}} \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial x'_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x_{\beta_k}}{\partial x'_{\nu_k}}. \tag{37.35}$$

Из ковариантного тензора ранга n можно получить контравариантный тензор того же ранга по формуле

$$A^{\mu_1 \ldots \mu_n} = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} g^{\alpha_1\mu_1} \ldots g^{\alpha_n\mu_n}, \tag{37.36}$$

причем в этом случае можно говорить о ковариантных и контравариантных составляющих одного и того же тензора. Путем поднятия не всех, а некоторых значков можно из ковариантного тензора получить также смешанный тензор того же ранга (места поднятых значков для ясности обозначаются точками). Из двух тензоров рангов k и m можно, путем перемножения их составляющих, построить тензор более высокого ранга $n = k + m$. Мы имеем, для ковариантных тензоров,

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} B_{\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n} = C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \tag{37.37}$$

и аналогичные формулы для контравариантных и смешанных тензоров.

Из данного тензора $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ ранга n можно по формуле

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2} \beta\gamma} g^{\beta\gamma} = B_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}} \tag{37.38}$$

построить новый тензор $B_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}}$, ранг которого на две единицы меньше ранга данного тензора. Такая операция называется свертыванием по соответствующим двум значкам. В формуле (37.38) свертывание произведено по последним двум значкам; очевидно, что результат будет зависеть от выбора той пары значков, по которой производится свертывание. Свертывание можно произвести в два приема: сперва поднять один из значков по формуле

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \gamma} g^{\beta\gamma} = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}^{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta} \tag{37.39}$$

и затем, приравняв другой значок α_{n-1} поднятому значку β, по нему просуммировать

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2} \beta}^{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta} = B_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}}. \tag{37.40}$$

Свертывание тензора второго ранга дает скаляр

$$T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = T, \tag{37.41}$$

который будет также равен

$$T^{\nu \cdot}_{\cdot \nu} = T^{\cdot \nu}_{\nu \cdot} = T. \tag{37.42}$$

То, что свертывание двух тензоров (37.30) и (37.31) дает один и тот же результат, вполне понятно, поскольку скаляр T зависит только от симметричной части тензора $T_{\mu\nu}$, а для симметричного ковариантного тензора обе формы смешанного тензора совпадают.

Свертывание вектора невозможно, поскольку он содержит только один значок. Но из двух векторов A_μ и B_ν можно построить тензор второго ранга, который затем и подвергнуть свертыванию. В результате получается скаляр

$$g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A_\mu B^\mu = A^\nu B_\nu, \tag{37.43}$$

который можно назвать скалярным произведением двух векторов A_μ и B_ν. Если оба вектора совпадают, то соответствующий скаляр равен

$$g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu = A_\mu A^\mu. \qquad (37.44)$$

Знак этого скалярного произведения вектора на самого себя позволяет подразделить векторы на временно-подобные (для которых $A_\mu A^\mu > 0$), на пространственно-подобные (для которых $A_\mu A^\mu < 0$) и на нулевые (для которых $A_\mu A^\mu = 0$). Это подразделение совпадает с тем, которое мы рассматривали в § 20.

Если даны два временно-подобных вектора A^μ и B^μ, инварианты которых равны единице, то их скалярное произведение будет по абсолютной величине больше единицы. Другими словами, из условий

$$g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = 1; \quad g_{\mu\nu}B^\mu B^\nu = 1 \qquad (37.45)$$

вытекает

$$|g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu| \geqslant 1. \qquad (37.46)$$

Докажем это. Условие (37.45) для вектора A^μ может быть написано в виде

$$\left(\sqrt{g_{00}}A^0 + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}g_{0i}A^i\right)^2 - \left(\frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}\right)A^iA^k = 1, \qquad (37.47)$$

или короче

$$\frac{1}{g_{00}}(A_0)^2 - a_{ik}A^iA^k = 1, \qquad (37.48)$$

где мы положили

$$a_{ik} = \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}. \qquad (37.49)$$

Аналогично

$$B_\mu B^\mu \equiv \frac{1}{g_{00}}(B_0)^2 - a_{ik}B^iB^k = 1\,. \qquad (37.50)$$

С другой стороны, скалярное произведение $A_\mu B^\mu$ равно

$$A_\mu B^\mu \equiv \frac{1}{g_{00}}A_0B_0 - a_{ik}A^iB^k. \qquad (37.51)$$

В силу установленных в § 35 неравенств для $g_{\mu\nu}$ величины a_{ik} будут коэффициентами определенной положительной квадратичной формы. Поэтому будет

$$|a_{ik}A^iB^k| \leqslant \sqrt{a_{ik}A^iA^k} \cdot \sqrt{a_{ik}B^iB^k} \qquad (37.52)$$

и если мы положим

$$A = \sqrt{a_{ik}A^iA^k}; \quad B = \sqrt{a_{ik}B^iB^k}, \qquad (37.53)$$

мы будем иметь

$$|A_0| = \sqrt{g_{00}}\sqrt{1+A^2}; \quad |B_0| = \sqrt{g_{00}}\sqrt{1+B^2},$$
$$|a_{ik}A^iB^k| \leqslant AB, \qquad (37.54)$$

и, следовательно,

$$|A_\mu B^\mu| \geqslant \sqrt{1+A^2}\sqrt{1+B^2} - AB \geqslant 1, \tag{37.55}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что справедливое для временно-подобных векторов неравенство (37.46), написанное в виде

$$|g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu| \geqslant \sqrt{g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu} \cdot \sqrt{g_{\mu\nu}B^\mu B^\nu}, \tag{37.56}$$

аналогично (37.52), но имеет обратный знак, что происходит из-за индефинитности метрики.

Для временно-подобного вектора обе нулевые составляющие (ковариантная и контравариантная) всегда имеют один и тот же знак. Предполагая, что $A_0 > 0$ и $B_0 > 0$ (и, следовательно, $A^0 > 0$ и $B^0 > 0$), мы можем формулу (37.56) написать в виде

$$A_\nu B^\nu \geqslant \sqrt{A_\nu A^\nu} \cdot \sqrt{B_\mu B^\mu}. \tag{37.57}$$

В заключение этого параграфа рассмотрим понятие псевдо-тензора в общем тензорном анализе. В § 22 мы ввели совокупность величин $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, антисимметричных относительно всех своих значков, причем $\varepsilon_{0123} = 1$. Эти величины удовлетворяют соотношению (22.02), которое мы, в несколько измененных обозначениях, напишем в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\rho}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\sigma} = D\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{37.58}$$

где D есть якобиан*) (35.11). С другой стороны, пользуясь правилом умножения определителей, нетрудно доказать формулу

$$\operatorname{Det} g_{\alpha\beta} = D^2 \operatorname{Det} g'_{\lambda\mu}, \tag{37.59}$$

представляющую обобщение формулы (35.18).

Переписав эту формулу в виде

$$g = D^2 g' \tag{37.60}$$

и извлекая после изменения знака положительный квадратный корень, получим

$$\sqrt{-g} = |D|\sqrt{-g'}. \tag{37.61}$$

Это дает нам закон преобразования определителя g. Умножим теперь обе части (37.58) на $\sqrt{-g'}$ и положим

$$E_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{37.62}$$

$$E'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g'}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{37.63}$$

*) В формуле (22.02) через D был обозначен якобиан обратной подстановки.

Мы можем тогда написать формулу (37.58) в виде

$$E'_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\rho}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\sigma}=\operatorname{sgn}D\cdot E_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{37.64}$$

где $\operatorname{sgn}D=\pm 1$ есть знак якобиана D. Эта формула показывает, что для преобразований с положительным якобианом величины $E_{\mu\nu\rho\sigma}$ преобразуются, как ковариантный тензор четвертого ранга, а для преобразований с отрицательным якобианом закон их преобразования отличается лишь знаком от закона преобразования такого тензора. Такую совокупность величин мы будем называть антисимметричным *псевдо-тензором*. Соответствующий контравариантный псевдо-тензор получится по общей формуле

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}=\sqrt{-g}\,g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{37.65}$$

и будет равен

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{37.66}$$

Антисимметричный псевдо-тензор четвертого ранга позволяет сопоставлять всякому антисимметричному тензору второго ранга $A_{\gamma\delta}$ дуальный псевдо-тензор

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}E^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\gamma\delta} \tag{37.67}$$

и всякому антисимметричному тензору третьего ранга $A_{\beta\gamma\delta}$ — дуальный псевдо-вектор

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha}=\frac{1}{6}E^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\beta\gamma\delta}. \tag{37.68}$$

Если антисимметричный тензор $A_{\beta\gamma\delta}$ составлен из трех векторов a_μ, b_μ, c_μ по формуле

$$A_{\beta\gamma\delta}=a_\beta b_\gamma c_\delta+a_\gamma b_\delta c_\beta+a_\delta b_\beta c_\gamma-a_\gamma b_\beta c_\delta-a_\beta b_\delta c_\gamma-a_\delta b_\gamma c_\beta, \tag{37.69}$$

то дуальный псевдо-вектор будет иметь составляющие

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{A}{}^{0}&=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}; &\quad \overset{*}{A}{}^{1}&=+\frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{vmatrix}a_0&a_2&a_3\\b_0&b_2&b_3\\c_0&c_2&c_3\end{vmatrix}\\
\overset{*}{A}{}^{2}&=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_3\\b_0&b_1&b_3\\c_0&c_1&c_3\end{vmatrix}; &\quad \overset{*}{A}{}^{3}&=+\frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_2\\b_0&b_1&b_2\\c_0&c_1&c_2\end{vmatrix}
\end{aligned}\right\}, \tag{37.70}$$

пропорциональные минорам (алгебраическим дополнениям) элементов $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{37.71}$$

Очевидно, будет

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha} a_{\alpha} = 0; \quad \overset{*}{A}{}^{\alpha} b_{\alpha} = 0; \quad \overset{*}{A}{}^{\alpha} c_{\alpha} = 0, \tag{37.72}$$

так что псевдо-вектор $\overset{*}{A}{}^{\alpha}$ будет перпендикулярен каждому из векторов a_{α}, b_{α}, c_{α}. Такой псевдо-вектор $\overset{*}{A}{}^{\alpha}$ можно назвать векторным произведением трех векторов a_{α}, b_{α}, c_{α}.

§ 38. Уравнения геодезической линии

Рассмотрим две точки-мгновения, соответствующие последовательным событиям. Координаты их обозначим через $x_{\alpha}^{(1)}$ и $x_{\alpha}^{(2)}$. Пусть материальная точка движется по некоторой кривой так, что при $x_0 = x_0^{(1)}$ ее пространственные координаты равны $x_k = x_k^{(1)}$, а при $x_0 = x_0^{(2)}$ ее пространственные координаты равны $x_k = x_k^{(2)}$.

Так как события $x_{\alpha}^{(1)}$ и $x_{\alpha}^{(2)}$ предполагаются последовательными, то такое движение возможно со скоростью, меньшей скорости света. Время x_0 и соответствующие ему пространственные координаты x_k материальной точки можно выразить параметрически через некоторый вспомогательный параметр p, положив

$$x_{\alpha} = \varphi^{\alpha}(p), \tag{38.01}$$

причем должно быть

$$x_{\alpha}^{(1)} = \varphi^{(\alpha)}(p_1); \quad x_{\alpha}^{(2)} = \varphi^{(\alpha)}(p_2). \tag{38.02}$$

Так как движение происходит со скоростью, меньшей скорости света, то для всякого бесконечно малого интервала мы должны иметь

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^{\alpha}\dot{\varphi}^{\beta}\,dp^2 > 0, \tag{38.03}$$

где точками обозначены производные по параметру p. Обозначив через $s = c\tau$ конечный интервал между последовательными событиями, пропорциональный промежутку собственного времени τ, мы будем иметь:

$$s = c\tau = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^{\alpha}\dot{\varphi}^{\beta}}\,dp. \tag{38.04}$$