пропорциональные минорам (алгебраическим дополнениям) элементов ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{37.71}$$

Очевидно, будет

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha} a_{\alpha} = 0; \quad \overset{*}{A}{}^{\alpha} b_{\alpha} = 0; \quad \overset{*}{A}{}^{\alpha} c_{\alpha} = 0, \tag{37.72}$$

так что псевдо-вектор $\overset{*}{A}{}^{\alpha}$ будет перпендикулярен каждому из векторов a_α, b_α, c_α. Такой псевдо-вектор $\overset{*}{A}{}^{\alpha}$ можно назвать векторным произведением трех векторов a_α, b_α, c_α.

§ 38. Уравнения геодезической линии

Рассмотрим две точки-мгновения, соответствующие последовательным событиям. Координаты их обозначим через $\underset{\alpha}{x}^{(1)}$ и $\underset{\alpha}{x}^{(2)}$. Пусть материальная точка движется по некоторой кривой так, что при $x_0 = x_0^{(1)}$ ее пространственные координаты равны $x_k = x_k^{(1)}$, а при $x_0 = x_0^{(2)}$ ее пространственные координаты равны $x_k = x_k^{(2)}$.

Так как события $\underset{\alpha}{x}^{(1)}$ и $\underset{\alpha}{x}^{(2)}$ предполагаются последовательными, то такое движение возможно со скоростью, меньшей скорости света. Время x_0 и соответствующие ему пространственные координаты x_k материальной точки можно выразить параметрически через некоторый вспомогательный параметр p, положив

$$x_\alpha = \varphi^\alpha(p), \tag{38.01}$$

причем должно быть

$$\underset{\alpha}{x}^{(1)} = \varphi^{(\alpha)}(p_1); \quad \underset{\alpha}{x}^{(2)} = \varphi^{(\alpha)}(p_2). \tag{38.02}$$

Так как движение происходит со скоростью, меньшей скорости света, то для всякого бесконечно малого интервала мы должны иметь

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\beta\, dp^2 > 0, \tag{38.03}$$

где точками обозначены производные по параметру p. Обозначив через $s = c\tau$ конечный интервал между последовательными событиями, пропорциональный промежутку собственного времени τ, мы будем иметь:

$$s = c\tau = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\beta}\, dp. \tag{38.04}$$

Рассмотрим теперь два квази-одновременных события. Точки пространства, где эти события произошли, мы можем соединить некоторой кривой, и каждой точке на этой кривой мы можем сопоставить определенный момент времени (т. е. написать для каждой точки свое „уравнение времени"), причем каждая пара этих промежуточных точек-мгновений должна быть квази-одновременной. Аналитически вид кривой и уравнение времени могут быть попрежнему представлены при помощи уравнений (38.01) и (38.02), но мы уже не можем толковать эти уравнения, как описывающие *движение* точки по кривой; они будут соответствовать *статическому* рассмотрению всей кривой в целом. Для каждой пары промежуточных бесконечно близких точек-мгновений мы будем иметь

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\beta\,dp^2 < 0, \tag{38.05}$$

и пространственный интервал

$$l = \int\limits_{p_1}^{p_2} \sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\beta}\,dp \tag{38.06}$$

будет характеризовать длину кривой.

Можно поставить вопрос об экстремальных значениях временно́го интервала (38.04) между двумя последовательными событиями и пространственного интервала (38.06) между двумя квази-одновременными событиями. Эта вариационная задача приводит к уравнениям, форма которых одинакова в обоих случаях (для временно́го и для пространственного интервала). Получаемые вариационные уравнения называются, по аналогии с теорией поверхностей, уравнениями геодезической линии. Необходимо, однако, отметить, что в теории поверхностей (где квадрат бесконечно малого расстояния есть определенная положительная форма от дифференциалов координат) геодезическая линия является, вообще говоря*), *кратчайшей*, тогда как экстремум временно́го интервала соответствует его *максимуму*, а экстремум пространственного интервала не представляет ни максимума, ни минимума. Последнее утверждение легко проверить в том частном случае, когда ds^2 имеет вид (37.04) (галилеева метрика). Для последовательных событий можно выбрать систему отсчета так, чтобы пространственные координаты начальной и конечной точек совпадали, и взять в качестве параметра время t. Мы будем тогда иметь

$$s = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \sqrt{c^2 - v^2}\,dt, \tag{38.07}$$

где

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{38.08}$$

---

*) Т. е. при достаточно близких начальной и конечной точках.

Решением вариационной задачи будут постоянные значения x, y, z, для которых $v^2=0$. Для всякой другой траектории будет $v^2>0$, откуда $\sqrt{c^2-v^2}<c$ и, следовательно,

$$s<s_{\max}=c\,(t^{(2)}-t^{(1)}). \tag{38.09}$$

Для пространственного интервала можно выбрать систему отсчета так, чтобы было

$$t^{(2)}=t^{(1)};\quad y^{(2)}=y^{(1)};\quad z^{(2)}=z^{(1)}, \tag{38.10}$$

тогда как $x^{(2)}>x^{(1)}$. Взяв в качестве параметра координату x, получим

$$l=\int\limits_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-c^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{38.11}$$

Решением вариационной задачи будут постоянные значения y, z, t, для которых

$$l_{\text{extr}}=x^{(2)}-x^{(1)}. \tag{38.12}$$

Но для других кривых $y(x)$, $z(x)$ и для других уравнений времени $t(x)$ может оказаться как $l>l_{\text{extr}}$, так и $l<l_{\text{extr}}$, смотря по тому, будет ли корень квадратный в (38.11) в среднем больше или меньше единицы.

Составим дифференциальные уравнения геодезической линии. Лагранжева функция нашей вариационной задачи будет равна

$$L=\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^{\alpha}\dot{\varphi}^{\beta}} \tag{38.13}$$

или, если мы будем писать x_α вместо φ^α,

$$L=\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta}. \tag{38.14}$$

Условие экстремума интеграла

$$s=\int\limits_{p_1}^{p_2}L\,dp \tag{38.15}$$

приводит к уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}=0. \tag{38.16}$$

Положим

$$F=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta, \tag{38.17}$$

откуда

$$L=\sqrt{2F}. \tag{38.18}$$

Рассуждая, как в § 17, мы можем выбрать параметр p так, чтобы было

$$\frac{dF}{dp} = 0; \quad F = \text{const}. \tag{38.19}$$

При таком выборе параметра уравнения (38.16) будут равносильны следующим:

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{38.20}$$

Последние уравнения имеют интеграл

$$\dot{x}_\alpha \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} - F = F = \text{const}, \tag{38.21}$$

так что условие (38.19) будет следствием (38.21). Раскрывая левую часть (38.20), получим

$$\frac{d}{dp}(g_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0 \tag{38.22}$$

и, выполняя дифференцирование,

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0. \tag{38.23}$$

Коэффициент при $\dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma$ мы можем симметризовать относительно значков β и γ и положить

$$[\beta\gamma, \alpha] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\right), \tag{38.24}$$

после чего уравнения геодезической линии напишутся

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta + [\beta\gamma, \alpha]\,\dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0. \tag{38.25}$$

Выражение (38.24) носит название скобки Кристоффеля первого рода. Чтобы решить уравнения (38.25) относительно вторых производных, умножим их на $g^{\alpha\nu}$, просуммируем по α и введем обозначения

$$\{\beta\gamma, \nu\} = g^{\alpha\nu}[\beta\gamma, \alpha]. \tag{38.26}$$

Мы получим тогда

$$\ddot{x}_\nu + \{\beta\gamma, \nu\}\,\dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0. \tag{38.27}$$

Выражение (38.26) принято называть скобкой Кристоффеля второго рода. Для него часто употребляют обозначение

$$\{\beta\gamma, \nu\} = \Gamma^\nu_{\beta\gamma}. \tag{38.28}$$

Для единообразия можно и для скобок Кристоффеля первого рода применять обозначение

$$[\alpha\beta, \gamma] = \Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta}, \tag{38.29}$$

хотя оно и менее употребительно.

Таким образом,

$$\Gamma_{\nu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\right), \tag{38.30}$$

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right). \tag{38.31}$$

С этими обозначениями уравнения геодезической линии напишутся:

$$\frac{d^2x_\nu}{dp^2}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}=0. \tag{38.32}$$

Если скобки Кристоффеля вычислены при помощи фундаментального тензора $g_{\alpha\beta}$, представимого в форме (35.17), то уравнения (38.32) эквивалентны уравнениям

$$\frac{d^2x'_k}{dp^2}=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{38.33}$$

для галилеевых координат x'_k. Это вытекает из ковариантности уравнений и из того факта, что в галилеевых координатах скобки Кристоффеля равны нулю. Таким образом, в этом случае уравнения геодезической линии (38.32) соответствуют линейной зависимости галилеевых координат от параметра p.

Нетрудно видеть, что выкладки, которые привели нас к уравнениям (38.32), остаются в силе независимо от знака величины F. Если $F>0$, то „геодезическая линия“ соединяет два последовательных события, и уравнения (38.32) можно толковать, как уравнения движения свободной материальной точки, движущейся со скоростью, меньшей скорости света. Приращение dp параметра p будет пропорционально приращению $d\tau$ собственного времени τ, и вместо (38.32) мы можем написать

$$\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx_\beta}{d\tau}=0. \tag{38.34}$$

Длина геодезической линии дает интервал собственного времени между „отправлением“ и „прибытием“ материальной точки. Если же $F<0$, то „геодезическая линия“ соединяет два квази-одновременных события, и мы можем положить dp пропорциональным приращению dl пространственного интервала. Уравнения (38.32) напишутся тогда

$$\frac{d^2x_\nu}{dl^2}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dl}\frac{dx_\beta}{dl}=0. \tag{38.35}$$

Случаю $F=0$ соответствует движение точки по лучу со скоростью света. В этом случае лагранжева функция (38.18) равна нулю и приведенный выше вывод уравнений геодезической линии теряет силу. Однако самые уравнения (38.32) сохраняют смысл и в этом случае, причем, так как они имеют интеграл (38.21), то они совместны с условием $F=0$. Чтобы обосновать их, можно исходить из уравнений Гамильтона, рассмотренных в § 36. Согласно (36.10) мы имеем

$$\frac{dx_k}{dx_0}=\frac{\partial H}{\partial\omega_k};\quad \frac{d\omega_k}{dx_0}=-\frac{\partial H}{\partial x_k}\quad (k=1,\ 2,\ 3), \tag{38.36}$$

где функция Гамильтона $H=-\omega_0$ получается решением относительно ω_0 уравнения

$$G\equiv g^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta=0. \tag{38.37}$$

Поэтому мы имеем

$$dH=-d\omega_0=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial G}{\partial\omega_0}\right)}\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}dx_\alpha+\frac{\partial G}{\partial\omega_k}d\omega_k\right). \tag{38.38}$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{d\omega_0}{dx_0}=-\frac{dH}{dx_0}=-\frac{\partial H}{\partial x_0}, \tag{38.39}$$

и выражая производные от H через производные от G, мы можем написать уравнения (38.36) в симметричном виде:

$$\frac{dx_\alpha}{dp}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\omega_\alpha};\quad \frac{d\omega_\alpha}{dp}=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}\quad (\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{38.40}$$

где dp рассматривается, как дифференциал независимой переменной p. Первые четыре уравнения (38.40) уже были выписаны нами в § 36. Раскрывая правые части (38.40), будем иметь

$$\frac{dx_\alpha}{dp}=g^{\alpha\beta}\omega_\beta;\quad \frac{d\omega_\alpha}{dp}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\omega_\mu\omega_\nu. \tag{38.41}$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения равносильны уравнениям (38.32). В самом деле, мы имеем

$$\omega_\mu=g_{\mu\lambda}\frac{dx_\lambda}{dp} \tag{38.42}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\omega_\mu=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}g_{\mu\lambda}\frac{dx_\lambda}{dp}=-g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\lambda}{dp}, \tag{38.43}$$

так как

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}g_{\mu\lambda}+g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\mu\nu}g_{\mu\lambda})=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\delta^\nu_\lambda)=0. \tag{38.44}$$

Подставляя (38.43) в (38.41), получим

$$\frac{d\omega_\alpha}{dp}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\omega_\nu\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\lambda}{dp} \tag{38.45}$$

или, вследствие первых уравнений (38.41),

$$\frac{d\omega_\alpha}{dp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\lambda}{dp}. \tag{38.46}$$

Исключая отсюда и из (38.42) величины ω_α, получаем окончательно

$$\frac{d}{dp}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx_\beta}{dp}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\lambda}{dp}. \tag{38.47}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (38.22), из которых были получены уравнения геодезической линии в форме (38.32). Переход от (38.41) к (38.47) есть обычный переход от уравнений Гамильтона к уравнениям Лагранжа.

Таким образом, мы доказали, что и „геодезическая линия" нулевой длины определяется уравнениями (38.32), если к ним присоединить условие $F=0$.

Заметим, что в силу постоянства величины F геодезическая линия сохраняет свой характер на всем своем протяжении: либо она все время соответствует движению точки со скоростью, меньшей скорости света, либо она все время есть нулевая линия, либо она сохраняет пространственный характер.

Для нулевой геодезической линии соотношение (38.37), в котором $\omega_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}$, может рассматриваться, как уравнение Гамильтона—Якоби для функции действия ω (см. § 36). Нетрудно получить уравнение Гамильтона—Якоби и для общего случая. Для определенности мы рассмотрим движение точки со скоростью, меньшей скорости света.

Выбирая в качестве параметра время $t = x_0$ и обозначая точкой дифференцирование по t, мы можем написать функцию Лагранжа нашей задачи*) в виде

$$L = +\sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}. \tag{38.48}$$

Обобщенные импульсы будут равны

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_i = +\frac{1}{L}(g_{0i} + g_{ik}\dot{x}_k), \tag{38.49}$$

а функция Гамильтона получится по обычному правилу

$$H = \dot{x}_i p_i - L = -\frac{1}{L}(g_{00} + g_{0k}\dot{x}_k), \tag{38.50}$$

причем скорости $\dot{x}_k$ должны быть здесь выражены при помощи (38.49) через p_i.

---

*) Для удобства мы берем здесь функцию Лагранжа со знаком, обратным тому, какой принят в механике, вследствие чего знак энергии будет обратен знаку функции Гамильтона H.

Если мы положим

$$p_0 = \frac{1}{L}(g_{00} + g_{0k}\dot{x}_k) \qquad (38.51)$$

и примем во внимание, что

$$L\,dt = ds, \qquad (38.52)$$

где s — длина дуги, то четыре величины p_i, p_0 могут быть записаны единообразно в виде

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{dx_\beta}{ds}. \qquad (38.53)$$

Из тождества

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 1 \qquad (38.54)$$

вытекает соотношение

$$g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = 1, \qquad (38.55)$$

которое можно рассматривать, как результат исключения трех скоростей $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ из четырех уравнений (38.49) и (38.51). Гамильтонова функция $H = -p_0$ получается решением уравнения (38.55) относительно p_0. По общему правилу, уравнение Гамильтона—Якоби получится, если выразить H, p_1, p_2, p_3 через частные производные функции действия S по времени и по координатам согласно формулам

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}; \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k}, \qquad (38.56)$$

которые могут быть записаны в виде

$$p_\nu = \frac{\partial S}{\partial x_\nu}. \qquad (38.57)$$

Таким образом, уравнение геодезической линии в форме Гамильтона—Якоби имеет вид

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x_\nu} = 1. \qquad (38.58)$$

Если известен полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби

$$S = S(x_0, x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) + c_0, \qquad (38.59)$$

содержащий три произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 (не считая аддитивной постоянной c_0), то, как доказывается в механике, производные от S по постоянным будут также постоянными

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = b_k \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (38.60)$$

Постоянные эти определяются затем из условий задачи.

Как видно из сравнения (38.58) с (38.37), уравнение нулевой геодезической линии получается из (38.58) заменой правой части нулем. Для пространственной геодезической линии правая часть уравнения Гамильтона — Якоби есть отрицательная постоянная, которую можно положить равной -1.

§ 39. Параллельный перенос вектора

В евклидовом пространстве равенство и параллельность двух векторов, отнесенных к разным точкам, формулируется весьма просто. Два вектора равны и параллельны, если их декартовы составляющие равны. То же определение, очевидно, годится и для векторов в плоскости. Оно непосредственно обобщается и на случай изогнутой поверхности, развертывающейся на плоскость. Если же мы имеем произвольную (не развертывающуюся) поверхность, то параллельность двух лежащих в ней векторов может быть определена только если точки приложения этих векторов бесконечно близки. Вектор на поверхности мы можем рассматривать, как вектор в пространстве, касательный к поверхности в точке его приложения. Если дан вектор на поверхности в точке P, то параллельный ему (в смысле геометрии на поверхности) вектор в бесконечно близкой точке Q может быть построен следующим образом. Данный вектор в точке P мы рассматриваем, как пространственный вектор, и строим в точке Q параллельный ему в обычном смысле пространственный вектор, а затем проектируем его на плоскость, касательную к поверхности в точке Q. Этот касательный вектор в Q мы и считаем параллельным данному вектору в P.

Аналитически это построение может быть выполнено следующим образом. Пусть y_1, y_2, y_3 — декартовы координаты в евклидовом пространстве, а x_1, x_2 — координатные параметры поверхности. Параметрические уравнения поверхности имеют вид:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2); \quad y_2 = y_2(x_1, x_2); \quad y_3 = y_3(x_1, x_2), \tag{39.01}$$

и квадрат элемента дуги на поверхности будет равен

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2, \tag{39.02}$$

где

$$g_{ik} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_k}. \tag{39.03}$$

Пусть A_1, A_2 — ковариантные и A^1, A^2 — контравариантные составляющие некоторого вектора на поверхности в точке $P(x_1, x_2)$. Мы можем рассматривать его, как пространственный вектор с прямо-