Как видно из сравнения (38.58) с (38.37), уравнение нулевой геодезической линии получается из (38.58) заменой правой части нулем. Для пространственной геодезической линии правая часть уравнения Гамильтона — Якоби есть отрицательная постоянная, которую можно положить равной -1.

§ 39. Параллельный перенос вектора

В евклидовом пространстве равенство и параллельность двух векторов, отнесенных к разным точкам, формулируется весьма просто. Два вектора равны и параллельны, если их декартовы составляющие равны. То же определение, очевидно, годится и для векторов в плоскости. Оно непосредственно обобщается и на случай изогнутой поверхности, развертывающейся на плоскость. Если же мы имеем произвольную (не развертывающуюся) поверхность, то параллельность двух лежащих в ней векторов может быть определена только если точки приложения этих векторов бесконечно близки. Вектор на поверхности мы можем рассматривать, как вектор в пространстве, касательный к поверхности в точке его приложения. Если дан вектор на поверхности в точке P, то параллельный ему (в смысле геометрии на поверхности) вектор в бесконечно близкой точке Q может быть построен следующим образом. Данный вектор в точке P мы рассматриваем, как пространственный вектор, и строим в точке Q параллельный ему в обычном смысле пространственный вектор, а затем проектируем его на плоскость, касательную к поверхности в точке Q. Этот касательный вектор в Q мы и считаем параллельным данному вектору в P.

Аналитически это построение может быть выполнено следующим образом. Пусть y_1, y_2, y_3 — декартовы координаты в евклидовом пространстве, а x_1, x_2 — координатные параметры поверхности. Параметрические уравнения поверхности имеют вид:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2); \quad y_2 = y_2(x_1, x_2); \quad y_3 = y_3(x_1, x_2), \tag{39.01}$$

и квадрат элемента дуги на поверхности будет равен

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2, \tag{39.02}$$

где

$$g_{ik} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}. \tag{39.03}$$

Пусть A_1, A_2 — ковариантные и A^1, A^2 — контравариантные составляющие некоторого вектора на поверхности в точке $P(x_1, x_2)$. Мы можем рассматривать его, как пространственный вектор с прямоугольными составляющими

$$Y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} A^1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} A^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3), \tag{39.04}$$

причем будет

$$A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \frac{\partial y_n}{\partial x_l} \quad (l = 1,\ 2). \tag{39.05}$$

Если мы, перейдя к точке $Q(x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2)$, не изменим прямоугольных составляющих Y_n, мы получим пространственный вектор, который уже не будет касательным к поверхности. Но его касательные составляющие определят на поверхности вектор

$$A_l + \delta A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} \delta x_k \right), \tag{39.06}$$

который мы и считаем, по определению, результатом параллельного (в смысле геометрии на поверхности) переноса вектора A_l в точку Q. Нормальная же составляющая Y_n, очевидно, из формулы (39.06) выпадает.

В формуле (39.06) добавка к $\frac{\partial y_n}{\partial x_l}$ учитывает изменение этой величины при переходе от P к Q. Из-за этой добавки составляющая A_l получает приращение

$$\delta A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} \delta x_k. \tag{39.07}$$

Подставляя сюда выражение (39.04) для Y_n, получаем

$$\delta A_l = \sum_{i,\,k=1}^{2} A^i \delta x_k \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l}. \tag{39.08}$$

На основании выражения (39.03) для g_{ik} нетрудно проверить, что в формуле (39.08) сумма по n равна

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} \right), \tag{39.09}$$

или, если воспользоваться обозначением (38.30) для скобок Кристоффеля,

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} = \Gamma_{i,\,kl} \tag{39.10}$$

Таким образом, приращение составляющих вектора при параллельном переносе будет равно

$$\delta A_l = \sum_{i,\,k=1}^{2} \Gamma_{i,\,kl} A^i \, \delta x_k. \qquad (39.11)$$

Существенно отметить, что это приращение зависит только от внутренних свойств поверхности, определяемых выражением (39.02) для ds^2.

Теория параллельного переноса векторов, развитая в работах Леви-Чивита [14] и его учеников, может быть формулирована почти без изменений для случая четырехмерного многообразия пространства-времени.

Пусть коэффициенты квадратичной формы

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta \qquad (39.12)$$

представлены в виде

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial y_n}{\partial x_\beta}, \qquad (39.13)$$

где числа e_n равны ± 1, а

$$y_n = y_n (x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) \qquad (39.14)$$

суть некоторые функции. В обычной теории относительности величины $g_{\alpha\beta}$ получаются из квадратичной формы (39.09) и представимы в виде (35.15), что соответствует случаю $N = 4$. В самом общем случае мы имеем 10 величин $g_{\alpha\beta}$, и для их представления в виде (39.13) нужно не больше 10 функций y_n (последнее может быть доказано и строго). Заметим, что так как сигнатура квадратичной формы (39.12) равна $(+ - - -)$, то среди чисел e_n должно быть не меньше одного положительного и не меньше трех отрицательных.

Величины y_n мы можем формально толковать, как декартовы координаты в некотором многомерном псевдо-евклидовом пространстве с метрикой, определяемой выражением

$$d\eta^2 = \sum_{n=1}^{N} e_n \, dy_n^2, \qquad (39.15)$$

а наше пространство-время — как некоторую гиперповерхность в этом многомерном пространстве.

Обычному контравариантному вектору A^α в пространстве-времени будет соответствовать в многомерном пространстве касательный к гиперповерхности вектор с декартовыми составляющими

$$Y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} A^\alpha \qquad (39.16)$$

(здесь и в дальнейшем снова подразумевается суммирование по греческим значкам от 0 до 3). Отсюда получаем на основании (39.13) следующие выражения для ковариантных составляющих вектора A_α:

$$A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n Y_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha}. \tag{39.17}$$

Значения составляющих вектора A_α после его параллельного переноса в бесконечно близкую точку мы можем, аналогично (39.06), определить по формуле

$$A_\alpha + \delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n Y_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \delta x_\beta\right), \tag{39.18}$$

откуда

$$\delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n Y_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \delta x_\beta, \tag{39.19}$$

и после подстановки вместо Y_n его выражения из (39.16)

$$\delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} A^\gamma \delta x_\beta. \tag{39.20}$$

Но из (39.13) следует, аналогично (39.10):

$$\sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta}, \tag{39.21}$$

где $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$ — обычные скобки Кристоффеля

$$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right). \tag{39.22}$$

Поэтому формула для приращения составляющих вектора при параллельном переносе напишется

$$\delta A_\alpha = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} A^\gamma \delta x_\beta, \tag{39.23}$$

так же как и в случае обыкновенной поверхности в обычном евклидовом пространстве.

В формулу (39.23) входят как ковариантные, так и контравариантные составляющие вектора, но нетрудно выразить в ней обе части через одни и те же составляющие. Мы имеем

$$A^\gamma = g^{\nu\gamma} A_\nu, \tag{39.24}$$

$$g^{\nu\gamma}\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{39.25}$$

Поэтому

$$\delta A_\alpha = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A_\nu \delta x_\beta. \tag{39.26}$$

Сюда входят только ковариантные составляющие. С другой стороны,

$$\delta A_\alpha = g_{\alpha\gamma} \delta A^\gamma + A^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} \delta x_\beta = \Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta} A^\gamma \delta x_\beta \tag{39.27}$$

и, как легко проверить,

$$\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}. \tag{39.28}$$

Отсюда

$$g_{\alpha\gamma} \delta A^\gamma = -\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} A^\gamma \delta x_\beta \tag{39.29}$$

и, следовательно, формула для контравариантных составляющих имеет вид

$$\delta A^\nu = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x_\beta. \tag{39.30}$$

Рассмотрим изменение скалярного произведения двух векторов при параллельном переносе. Мы имеем

$$\delta (A^\nu B_\nu) = B_\nu \delta A^\nu + A^\alpha \delta B_\alpha. \tag{39.31}$$

Подставляя сюда выражение для δA^ν из (39.30) и написав, согласно (39.26), δB_α в виде

$$\delta B_\alpha = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} B_\nu \delta x_\beta, \tag{39.32}$$

мы убедимся, что оба члена в (39.31) сокращаются, и мы получаем

$$\delta (A^\nu B_\nu) = 0. \tag{39.33}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе не меняется. В частности, не меняется и абсолютная величина вектора.

Мы рассматривали до сих пор бесконечно малые смещения. Но, суммируя их, мы можем определить параллельный перенос и вдоль любой заданной кривой. Пусть координаты точки на кривой заданы как функции некоторого параметра p:

$$x_\beta = x_\beta (p). \tag{39.34}$$

Величины $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ (которые являются функциями координат) также будут известными функциями от p. Для определения вектора A^ν в функции от p мы будем иметь дифференциальные уравнения

$$\frac{dA^\nu}{dp} = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{dx_\beta}{dp}. \tag{39.35}$$

Если заданы значения A^ν для начальной точки кривой, то, интегрируя уравнения (39.35), мы получим значения A^ν и для конечной точки кривой. Тем самым мы произведем параллельный перенос вектора из начальной точки в конечную. Результат будет, очевидно, зависеть от вида кривой, вдоль которой производится перенос.

Сравним уравнения (39.35) параллельного переноса с уравнениями геодезической линии

$$\frac{d^2x_\nu}{dp^2}+\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}=0. \tag{38.27}$$

Те и другие уравнения совпадут, если мы положим

$$A^\nu=\frac{dx_\nu}{dp}. \tag{39.36}$$

Если геодезическая линия временно-подобна (т. е. соответствует движению точки со скоростью, меньшей скорости света), то в качестве параметра p можно взять собственное время τ, и вектор A^ν будет совпадать с четырехмерной скоростью. Таким образом, в этом случае уравнения геодезической линии можно толковать, как уравнения параллельного переноса вектора скорости вдоль направления, даваемого этим же самым вектором (в четырехмерном смысле).

Из уравнений параллельного переноса для вектора нетрудно получить соответствующие уравнения для тензора любого ранга. В качестве примера рассмотрим случай ковариантного тензора второго ранга $T_{\mu\nu}$. Мы будем исходить из требования, чтобы инвариант

$$I=T_{\mu\nu}A^\mu B^\nu \tag{39.37}$$

не менялся при параллельном переносе, каковы бы ни были векторы A^μ и B^ν. Меняя обозначения значков, мы можем написать величину δI в виде

$$\delta I=A^\mu B^\nu(\delta T_{\mu\nu}-T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\,\delta x_\beta-T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\,\delta x_\beta). \tag{39.38}$$

Так как это выражение должно обращаться в нуль при любых A^μ и B^ν, мы должны иметь

$$\delta T_{\mu\nu}=T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\,\delta x_\beta+T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\,\delta x_\beta, \tag{39.39}$$

что и является искомым обобщением уравнений параллельного переноса.

§ 40. Ковариантное дифференцирование

В случае постоянных $g_{\mu\nu}$ операцию дифференцирования по координате можно было, в известном смысле, рассматривать, как умножение на некоторый вектор. Так, если A_ν есть вектор, заданный в некоторой области как функция точки, то выражение $\nabla_\mu A_\nu=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$ будет, при постоянных $g_{\mu\nu}$, тензором с теми же свойствами преобразования, как произведение векторов ∇_μ и A_ν. Поэтому в указанном случае