кривой. Тем самым мы произведем параллельный перенос вектора из начальной точки в конечную. Результат будет, очевидно, зависеть от вида кривой, вдоль которой производится перенос.

Сравним уравнения (39.35) параллельного переноса с уравнениями геодезической линии

$$\frac{d^2x_\nu}{dp^2}+\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}=0. \tag{38.27}$$

Те и другие уравнения совпадут, если мы положим

$$A^\nu=\frac{dx_\nu}{dp}. \tag{39.36}$$

Если геодезическая линия временно-подобна (т. е. соответствует движению точки со скоростью, меньшей скорости света), то в качестве параметра p можно взять собственное время τ, и вектор A^ν будет совпадать с четырехмерной скоростью. Таким образом, в этом случае уравнения геодезической линии можно толковать, как уравнения параллельного переноса вектора скорости вдоль направления, даваемого этим же самым вектором (в четырехмерном смысле).

Из уравнений параллельного переноса для вектора нетрудно получить соответствующие уравнения для тензора любого ранга. В качестве примера рассмотрим случай ковариантного тензора второго ранга $T_{\mu\nu}$. Мы будем исходить из требования, чтобы инвариант

$$I=T_{\mu\nu}A^\mu B^\nu \tag{39.37}$$

не менялся при параллельном переносе, каковы бы ни были векторы A^μ и B^ν. Меняя обозначения значков, мы можем написать величину δI в виде

$$\delta I=A^\mu B^\nu(\delta T_{\mu\nu}-T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\,\delta x_\beta-T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\,\delta x_\beta). \tag{39.38}$$

Так как это выражение должно обращаться в нуль при любых A^μ и B^ν, мы должны иметь

$$\delta T_{\mu\nu}=T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\,\delta x_\beta+T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\,\delta x_\beta, \tag{39.39}$$

что и является искомым обобщением уравнений параллельного переноса.

§ 40. Ковариантное дифференцирование

В случае постоянных $g_{\mu\nu}$ операцию дифференцирования по координате можно было, в известном смысле, рассматривать, как умножение на некоторый вектор. Так, если A_ν есть вектор, заданный в некоторой области как функция точки, то выражение $\nabla_\mu A_\nu=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$ будет, при постоянных $g_{\mu\nu}$, тензором с теми же свойствами преобразования, как произведение векторов ∇_μ и A_ν. Поэтому в указанном случае тензорный анализ не отличается, в формальном отношении, от тензорной алгебры.

В случае переменных $g_{\mu\nu}$ это уже будет не так: производная от вектора по координате не будет тензором. Однако и здесь можно построить такую линейную комбинацию из производной от вектора и составляющих самого вектора, чтобы она преобразовывалась как тензор.

Рассмотрим вектор A_ν, заданный как функция точки в некоторой области. Составляющие его будут функциями от координат. Изменение этого вектора при переходе от точки $P(x_\beta)$ к бесконечно близкой точке $Q(x_\beta+\delta x_\beta)$ будет

$$(A_\nu)_Q-(A_\nu)_P=\delta_1 A_\nu=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta}\delta x_\beta. \tag{40.01}$$

Мы можем, однако, сравнивать значение $(A_\nu)_Q$ вектора A_ν в точке Q не с его значением в точке P, а с результатом $(A_\nu)''_Q$ его параллельного переноса из P в Q. Согласно (39.26), при параллельном переносе вектора его изменение равно

$$(A_\nu)''_Q-(A_\nu)_P=\delta_2 A_\nu=\Gamma^\mu_{\nu\beta}A_\mu\delta x_\beta. \tag{40.02}$$

Вычитая это выражение из предыдущего, т. е. составляя разность

$$(A_\nu)_Q-(A_\nu)''_Q=\delta A_\nu=\delta_1 A_\nu-\delta_2 A_\nu, \tag{40.03}$$

мы получим

$$\delta A_\nu=\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta}-\Gamma^\mu_{\nu\beta}A_\mu\right)\delta x_\beta. \tag{40.04}$$

Величина δA_ν есть разность между фактическим изменением вектора A_ν и тем, какое он претерпел бы при параллельном переносе. В то же время это есть разность двух векторов $(A_\nu)_Q$ и $(A_\nu)''_Q$, которые оба относятся к одной и той же точке Q. Поэтому δA_ν есть вектор. Но при произвольных δx_β это может быть только в том случае, если величина

$$\nabla_\beta A_\alpha\equiv\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}-\Gamma^\nu_{\alpha\beta}A_\nu \tag{40.05}$$

есть ковариантный тензор второго ранга *). Эта величина называется тензориальной или ковариантной производной. Она и является искомым обобщением обыкновенной производной от вектора на случай переменных $g_{\mu\nu}$.

Путем аналогичных рассуждений можно составить выражение для ковариантной производной от контравариантного вектора. Оно имеет

---

*) Тензорный характер (40.05) может быть доказан и без привлечения понятия параллельного переноса. Для этого достаточно проверить прямым вычислением, исходя из (37.06), закон преобразования скобок Кристоффеля (42.04) и затем преобразовать выражение (40.05) к новым переменным, используя этот закон, а также закон преобразования (37.06) составляющих вектора.

вид

$$\nabla_\beta A^\nu \equiv \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\beta} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha. \tag{40.06}$$

Формулы для ковариантных производных легко обобщаются на случай произвольного тензора. Рассмотрим сперва тензор второго ранга $T_{\mu\nu}$. Согласно (39.39), изменение его составляющих при параллельном переносе из P в Q равно

$$\delta_2 T_{\mu\nu} = (\Gamma^\alpha_{\mu\beta} T_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} T_{\mu\alpha})\, \delta x_\beta. \tag{40.07}$$

Если же составляющие $T_{\mu\nu}$ являются функциями от координат, то изменение их при переходе из P в Q равно

$$\delta_1 T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \delta x_\beta. \tag{40.08}$$

Разность

$$\delta T_{\mu\nu} = \delta_1 T_{\mu\nu} - \delta_2 T_{\mu\nu}, \tag{40.09}$$

равная

$$\delta T_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \Gamma^\rho_{\mu\beta} T_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\beta} T_{\mu\rho}\right) \delta x_\beta, \tag{40.10}$$

есть тензор при любых значениях смещений δx_β. Поэтому и величина

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \Gamma^\rho_{\mu\beta} T_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\beta} T_{\mu\rho} \tag{40.11}$$

должна быть тензором.

Аналогично доказывается тензорный характер величин

$$\nabla_\beta T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \Gamma^\mu_{\rho\beta} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\beta} T^{\mu\rho}, \tag{40.12}$$

где $T^{\mu\nu}$ есть контравариантный тензор, а также

$$\nabla_\beta T^\mu_\nu = \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\nu} T^\mu_\rho + \Gamma^\mu_{\rho\beta} T^\rho_\nu, \tag{40.13}$$

где T^μ_ν есть смешанный тензор.

Применяя правило составления ковариантной производной к ковариантным или контравариантным составляющим фундаментального тензора, мы убедимся, что выражения (40.11) и (40.12) для него равны нулю. Равенство нулю ковариантных производных от фундаментального тензора носит название леммы Риччи. Ввиду важности этой леммы рассмотрим соответствующие формулы подробнее.

При $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ величина (40.11) равна

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\mu\beta} - g_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\beta} = 0. \tag{40.14}$$

В самом деле, эта формула, написанная в виде

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} = \Gamma_{\nu,\,\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\,\nu\beta}, \tag{40.15}$$

приводится к тождеству в силу определения (39.22) величин $\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta}$. [Формула эта совпадает с (39.28)].

Полагая в (40.12) $T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, получаем

$$\nabla_\beta g^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\rho\nu}\Gamma^{\mu}_{\rho\beta} + g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\rho\beta} = 0. \tag{40.16}$$

Для проверки этого соотношения достаточно воспользоваться явным выражением (38.29) для $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$. Соотношение (40.16) приведется к виду

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\beta} = 0 \tag{40.17}$$

и будет эквивалентно следующему:

$$g_{\nu\alpha} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}(g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha}) = 0. \tag{40.18}$$

Наконец, при $T^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ выражение (40.13) обращается в нуль в силу симметрии величин $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ относительно нижних значков.

Ковариантное дифференцирование произведения двух тензоров подчиняется тем же правилам, как обычное дифференцирование. Это непосредственно вытекает из нашего способа вывода выражения для ковариантной производной; выражение это получается из выражения для бесконечно малого приращения, для которого имеет место правило составления дифференциала от произведения.

Проверим правило дифференцирования произведения на примере произведения двух векторов. Положив в формуле (40.11)

$$T_{\mu\nu} = U_\mu V_\nu, \tag{40.19}$$

мы получим

$$\nabla_\beta (U_\mu V_\nu) = \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} - \Gamma^{\rho}_{\mu\beta} U_\rho\right) V_\nu + U_\mu \left(\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} V_\rho\right) \tag{40.20}$$

и вследствие (40.05)

$$\nabla_\beta (U_\mu V_\nu) = (\nabla_\beta U_\mu) \cdot V_\nu + U_\mu (\nabla_\beta V_\nu). \tag{40.21}$$

Применяя правило дифференцирования произведения к выражению

$$U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu \tag{40.22}$$

и пользуясь тем, что ковариантная производная от фундаментального тензора равна нулю, мы получим

$$\nabla_\beta U_\mu = g_{\mu\nu} \nabla_\beta U^\nu. \tag{40.23}$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании величины $g_{\mu\nu}$ ведут себя, как постоянные, и их можно выносить из-под знака ковариантной производной. Другими словами, при ковариантном дифференцировании безразлично, будут ли значки опущены (или подняты) до или после составления производной.

Мы выписали выше в явной форме выражения для ковариантной производной от вектора и от тензора второго ранга. Ковариантная производная от скаляра Φ совпадает с обыкновенной производной

$$\nabla_\beta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\beta}. \tag{40.24}$$

Она является, как мы знаем, ковариантным вектором.

Для полноты мы выпишем также общее выражение для ковариантной производной от тензора произвольного ранга

$$U^{(\mu)}_{(\nu)} = U^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_k}, \tag{40.25}$$

содержащего m контравариантных и k ковариантных значков. Мы имеем

$$\nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(U^{(\mu)}_{(\nu)}\right) + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\beta} U^{\rho\mu_2 \ldots \mu_m}_{(\nu)} + \ldots + \Gamma^{\mu_m}_{\rho\beta} U^{\mu_1 \ldots \mu_{m-1}\rho}_{(\nu)} -$$
$$- \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_1} U^{(\mu)}_{\rho\nu_2 \ldots \nu_k} - \ldots - \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_k} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{k-1}\rho}. \tag{40.26}$$

Здесь в каждом члене суммы один из значков дифференцируемого тензора переходит в значок коэффициента Γ той же вариантности, а в самом тензоре заменяется значком суммирования, который входит также в качестве значка Γ противоположной вариантности. Один из нижних значков Γ есть всегда номер координаты, по которой производится дифференцирование. При этом те члены, в которых меняется верхний значок тензора, входят со знаком плюс, а те члены, в которых меняется нижний значок тензора, входят со знаком минус.

Иногда удобно употреблять особое обозначение для операции ковариантного дифференцирования, сопровождаемой поднятием соответствующего значка. Операцию

$$\nabla^\alpha = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta \tag{40.27}$$

называют контравариантным дифференцированием.

§ 41. Примеры составления ковариантных производных

Применим полученные правила ковариантного дифференцирования к некоторым частным случаям.

Составим прежде всего расходимость данного вектора. Согласно (40.06), выражение

$$\nabla_\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} A^\alpha \tag{41.01}$$