Таким образом, при ковариантном дифференцировании величины $g_{\mu\nu}$ ведут себя, как постоянные, и их можно выносить из-под знака ковариантной производной. Другими словами, при ковариантном дифференцировании безразлично, будут ли значки опущены (или подняты) до или после составления производной.

Мы выписали выше в явной форме выражения для ковариантной производной от вектора и от тензора второго ранга. Ковариантная производная от скаляра Φ совпадает с обыкновенной производной

$$\nabla_\beta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\beta}. \tag{40.24}$$

Она является, как мы знаем, ковариантным вектором.

Для полноты мы выпишем также общее выражение для ковариантной производной от тензора произвольного ранга

$$U^{(\mu)}_{(\nu)} = U^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_k}, \tag{40.25}$$

содержащего m контравариантных и k ковариантных значков. Мы имеем

$$\nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(U^{(\mu)}_{(\nu)}\right) + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\beta} U^{\rho\mu_2 \ldots \mu_m}_{(\nu)} + \ldots + \Gamma^{\mu_m}_{\rho\beta} U^{\mu_1 \ldots \mu_{m-1}\rho}_{(\nu)} -$$
$$- \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_1} U^{(\mu)}_{\rho\nu_2 \ldots \nu_k} - \ldots - \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_k} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{k-1}\rho}. \tag{40.26}$$

Здесь в каждом члене суммы один из значков дифференцируемого тензора переходит в значок коэффициента Γ той же вариантности, а в самом тензоре заменяется значком суммирования, который входит также в качестве значка Γ противоположной вариантности. Один из нижних значков Γ есть всегда номер координаты, по которой производится дифференцирование. При этом те члены, в которых меняется верхний значок тензора, входят со знаком плюс, а те члены, в которых меняется нижний значок тензора, входят со знаком минус.

Иногда удобно употреблять особое обозначение для операции ковариантного дифференцирования, сопровождаемой поднятием соответствующего значка. Операцию

$$\nabla^\alpha = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \tag{40.27}$$

называют контравариантным дифференцированием.

§ 41. Примеры составления ковариантных производных

Применим полученные правила ковариантного дифференцирования к некоторым частным случаям.

Составим прежде всего расходимость данного вектора. Согласно (40.06), выражение

$$\nabla_\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} A^\alpha \tag{41.01}$$

представляет смешанный тензор второго ранга. Свертывая его по значкам μ и ν, мы получим скаляр

$$\operatorname{Div} A \equiv \nabla_\nu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\nu} A^\alpha, \tag{41.02}$$

который и является обобщением выражения (21.24) для четырехмерной расходимости. Это выражение может быть упрощено. Мы имеем

$$\Gamma^\nu_{\alpha\nu} = g^{\mu\nu} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}\right) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41.03}$$

Но если g есть определитель, составленный из $g_{\mu\nu}$, и $gg^{\mu\nu}$ есть минор элемента $g_{\mu\nu}$ в этом определителе, то по правилу дифференцирования определителей мы имеем

$$dg = gg^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu}, \tag{41.04}$$

откуда

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41.05}$$

Заметим, что вследствие (40.18) это выражение равно

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41.06}$$

Таким образом,

$$\Gamma^\nu_{\alpha\nu} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \lg \sqrt{-g}. \tag{41.07}$$

Подставляя это в (41.02), получим:

$$\nabla_\nu A^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\, A^\nu). \tag{41.08}$$

Таким образом, умноженная на $\sqrt{-g}$ расходимость вектора A равна сумме частных производных по координатам от его контравариантных составляющих, умноженных на $\sqrt{-g}$.

Если мы возьмем в качестве вектора A градиент некоторого скаляра φ и положим

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \tag{41.09}$$

и, следовательно,

$$A^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}, \tag{41.10}$$

то расходимость этого вектора даст инвариантное выражение

$$\Box \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right), \tag{41.11}$$

которое является обобщением оператора Даламбера (21.27).

С другой стороны, ту же расходимость мы можем вычислить следующим образом. Составим сперва ковариантную производную от градиента φ. По общему правилу (40.05) мы получим выражение

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}, \tag{41.12}$$

которое будет симметричным относительно значков μ и ν. Его можно назвать второй ковариантной производной от скаляра φ. Составляя затем инвариант

$$\Box\varphi = g^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}, \tag{41.13}$$

мы будем иметь

$$\Box\varphi = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \Gamma^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}, \tag{41.14}$$

где мы положили для краткости

$$\Gamma^\alpha = g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \tag{41.15}$$

Так как оба выражения (41.11) и (41.14) представляют расходимость одного и того же вектора, то они должны совпадать. Равенство коэффициентов при вторых производных от φ непосредственно очевидно. Приравнивая коэффициенты при первых производных, мы получим тождество

$$\Gamma^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\right), \tag{41.16}$$

которое может быть проверено и непосредственно.

Заметим, что если мы введем в качестве координат x_0, x_1, x_2, x_3 четыре решения уравнения $\Box\varphi = 0$, то для них будет $\Gamma^\alpha = 0$. Такие координаты, удовлетворяющие, кроме того, условиям на бесконечности, о которых мы будем говорить в следующей главе, называются гармоническими. В обычной теории относительности гармоническими являются декартовы координаты и время.

Если вектор A_μ есть градиент некоторого скаляра, то для него разность ковариантных производных $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ равна нулю. В общем же случае эта разность не равна нулю, и ее можно рассматривать, как четырехмерное обобщение вихря данного вектора. Положим *)

$$(\mathrm{Rot}\, A)_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \tag{41.17}$$

Это выражение представляет, по определению, антисимметричный ковариантный тензор второго ранга. Пользуясь формулой (40.05), легко убедиться, что при составлении разности (41.17) члены, отличающие ковариантные производные от обыкновенных, сократятся, и

*) Символ Rot мы будем употреблять в смысле четырехмерного обобщения вихря, сохраняя для трехмерного вихря символ curl.

мы получим

$$(\mathrm{Rot}\, A)_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{41.18}$$

т. е. выражение, совпадающее с обычным выражением для вихря, которое, таким образом, применимо и в произвольных координатах.

Обозначим через $A_{\mu\nu}$ симметричную часть ковариантной производной от вектора A_μ. Мы имеем

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\nu A_\mu + \nabla_\mu A_\nu) \tag{41.19}$$

или, после применения (40.05),

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha. \tag{41.20}$$

При помощи симметричного тензора $A_{\mu\nu}$ мы можем определить вторую ковариантную производную от вектора A_μ, положив

$$\nabla_{\mu\nu} A_\sigma = \nabla_\nu A_{\mu\sigma} + \nabla_\mu A_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma A_{\mu\nu}. \tag{41.21}$$

Раскрывая здесь при помощи (40.09) выражения для тензориальных производных, мы будем иметь

$$\nabla_{\mu\nu} A_\sigma = \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - 2\Gamma^\rho_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\sigma} A_\rho) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\Gamma^\rho_{\nu\sigma} A_\rho). \tag{41.22}$$

Аналогично, вторая тензориальная производная от контравариантного вектора напишется:

$$\nabla_{\mu\nu} A^\rho = \frac{\partial^2 A^\rho}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial A^\rho}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} A^\alpha. \tag{41.23}$$

Рассмотрим теперь расходимость тензора второго ранга, который будем писать в контравариантной форме. Согласно (40.10), мы имеем

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\nu} T^{\mu\rho}. \tag{41.24}$$

Преобразуя при помощи (41.07) второй член, мы можем написать:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \tag{41.25}$$

Положив здесь $T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ и зная, что тензориальная производная от фундаментального тензора равна нулю, мы вновь получаем тождество (41.16). Если тензор $T^{\mu\nu}$ антисимметричен, то последний член в формуле (41.25) обращается в нуль. Таким образом, расходимость антисимметричного тензора сводится, так же как и расходимость вектора, к сумме производных по координатам. В случае же произвольного тензора подобное представление невозможно.

Напишем выражение для тензориальной производной от ковариантного тензора и два других выражения, получаемых из первого круговой перестановкой значков:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\sigma F_{\mu\nu} &= \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} F_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} F_{\mu\rho} \\ \nabla_\mu F_{\nu\sigma} &= \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} F_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\sigma\mu} F_{\nu\rho} \\ \nabla_\nu F_{\sigma\mu} &= \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu} F_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} \end{aligned}\right\} \tag{41.26}$$

Предположим теперь, что тензор $F_{\mu\nu}$ антисимметричен:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \tag{41.27}$$

Тогда

$$\nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{41.28}$$

тогда как члены вне знаков производных попарно сокращаются. Антисимметричное относительно всех трех значков выражение

$$F_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} \tag{41.29}$$

будет, следовательно, тензором. Этот антисимметричный тензор третьего ранга $F_{\mu\nu\sigma}$ называется *циклом* данного антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$. С подобным выражением мы уже встречались в § 24.

Цикл данного антисимметричного тензора второго ранга связан с расходимостью дуального антисимметричного псевдо-тензора. Введем, согласно (37.67), дуальный псевдо-тензор $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$ по формуле

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}, \tag{41.30}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{10} &= F_{23}; & \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{20} &= F_{31}; & \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{30} &= F_{12}, \\ \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{23} &= F_{10}; & \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{31} &= F_{20}; & \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{12} &= F_{30}. \end{aligned}\right\} \tag{41.31}$$

Введем также, согласно (37.68), дуальный к $F_{\mu\nu\sigma}$ псевдо-вектор.

$$\overset{*}{F}{}^{\rho} = \frac{1}{6} E^{\rho\mu\nu\sigma} F_{\mu\nu\sigma}, \tag{41.32}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^0 = -F_{123},\\ \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^1 = F_{230};\quad &\sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^2 = F_{310};\quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^3 = F_{120}. \end{aligned}\right\} \tag{41.33}$$

Если тензор $F_{\mu\nu\sigma}$ есть цикл $F_{\mu\nu}$, то мы будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} = \overset{*}{F}{}^{\alpha}, \tag{41.34}$$

так что псевдо-вектор $\overset{*}{F}{}^{\alpha}$ есть расходимость псевдо-тензора $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$.

Тот же результат легко получить и без перехода к численным значениям значков, если воспользоваться тем, что вычисленная по общему правилу тензориальная производная от $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (а также от $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$) тождественно равна нулю.

§ 42. Закон преобразования скобок Кристоффеля и локально геодезическая система координат. Условия приводимости основной квадратичной формы к постоянным коэффициентам

Тензориальные производные отличаются от обыкновенных производных членами, содержащими скобки Кристоффеля

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right). \tag{42.01}$$

Если в некоторой точке $x_\rho = \overset{0}{x}_\rho$ все скобки Кристоффеля равны нулю, то выражения для тензориальных и для обыкновенных производных совпадают. Покажем, что в окрестности каждой точки можно ввести такую систему координат, чтобы в этой точке все величины $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ обратились в нуль. Тогда, в силу уравнений (40.14) и (40.16) в этой точке обратятся в нуль и все производные от фундаментального тензора по координатам.

Установим, прежде всего, закон преобразования скобок Кристоффеля при переходе от данной системы координат (x_0, x_1, x_2, x_3) к некоторой новой системе координат (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3). Этот закон можно было бы вывести непосредственно из определения (42.01) величин $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, пользуясь законом преобразования для фундаментального тензора. Однако проще рассуждать следующим образом. Мы знаем, что величины

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} \tag{42.02}$$