откуда

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{0}=-F_{123},\\ \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{1}=F_{230};\quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{2}=F_{310};\quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{3}=F_{120}.\end{array}\right\}\tag{41.33}$$

Если тензор $F_{\mu\nu\sigma}$ есть цикл $F_{\mu\nu}$, то мы будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta})}{\partial x_\beta}=\overset{*}{F}{}^{\alpha},\tag{41.34}$$

так что псевдо-вектор $\overset{*}{F}{}^{\alpha}$ есть расходимость псевдо-тензора $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$.

Тот же результат легко получить и без перехода к численным значениям значков, если воспользоваться тем, что вычисленная по общему правилу тензориальная производная от $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (а также от $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$) тождественно равна нулю.

§ 42. Закон преобразования скобок Кристоффеля и локально геодезическая система координат. Условия приводимости основной квадратичной формы к постоянным коэффициентам

Тензориальные производные отличаются от обыкновенных производных членами, содержащими скобки Кристоффеля

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right).\tag{42.01}$$

Если в некоторой точке $x_\rho=\overset{0}{x}_\rho$ все скобки Кристоффеля равны нулю, то выражения для тензориальных и для обыкновенных производных совпадают. Покажем, что в окрестности каждой точки можно ввести такую систему координат, чтобы в этой точке все величины $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ обратились в нуль. Тогда, в силу уравнений (40.14) и (40.16) в этой точке обратятся в нуль и все производные от фундаментального тензора по координатам.

Установим, прежде всего, закон преобразования скобок Кристоффеля при переходе от данной системы координат $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ к некоторой новой системе координат $(x'_0,\ x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$. Этот закон можно было бы вывести непосредственно из определения (42.01) величин $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$, пользуясь законом преобразования для фундаментального тензора. Однако проще рассуждать следующим образом. Мы знаем, что величины

$$\varphi_{\mu\nu}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\tag{42.02}$$

представляют тензор. Это значит, что для всякой функции φ и для любого преобразования координат имеют место равенства

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}=\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'_\alpha\,\partial x'_\beta}-(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\sigma}\right\}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu},\tag{42.03}$$

где $(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'$ суть скобки Кристоффеля, вычисленные для штрихованной системы координат. Полагая здесь $\varphi=x'_\sigma$, получим

$$\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho}=-(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}.\tag{42.04}$$

Эта формула и дает искомый закон преобразования. Наличие члена с второй производной показывает, что $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ не есть тензор. Если же рассматриваемое преобразование — линейное, то указанный член отсутствует, и, следовательно, по отношению к линейным преобразованиям величины $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ ведут себя, как тензор.

Пусть в данной точке величины $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ имеют значения $(\Gamma^\rho_{\mu\nu})_0$. В этой точке величины $(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'$ штрихованной системы обратятся в нуль, если формулы преобразования координат удовлетворяют равенствам

$$\left(\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\right)_0-(\Gamma^\rho_{\mu\nu})_0\left(\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho}\right)_0=0.\tag{42.05}$$

Эти равенства будут выполняться, если мы положим

$$x'_\sigma=x_\sigma-x^0_\sigma+\frac{1}{2}(\Gamma^\sigma_{\mu\nu})_0(x_\mu-x^0_\mu)(x_\nu-x^0_\nu).\tag{42.06}$$

Для преобразования (42.06) будет

$$\left(\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho}\right)_0=\delta^\sigma_\rho.\tag{42.07}$$

Поэтому значения в данной точке составляющих любого тензора будут одинаковы в штрихованной и в нештрихованной координатной системе. В частности, не изменятся значения фундаментального тензора, тогда как все первые производные от него обратятся в данной точке в нуль. Этим можно пользоваться для упрощения вычислений с тензорами. В самом деле, если относительно некоторого выражения известно, что оно есть тензор и что оно обращается в нуль при условии $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=0$, то оно будет равно нулю и без этого условия.

Можно доказать, что надлежащим выбором координатной системы можно обратить в нуль производные от $g_{\mu\nu}$ не только в данной точке, но и вдоль заданной линии [14].

Координатная система, в которой, для данной точки, производные от $g_{\mu\nu}$ обращаются в нуль, называется локально геодезической. Это название оправдывается тем, что в указанной системе отсчета уравнения геодезической линии сводятся в данной точке к равенству нулю вторых производных от координат по параметру p (вблизи этой точки вторые производные будут величинами первого порядка малости). Поэтому координаты будут там, с точностью до членов третьего порядка, линейными функциями от параметра.

Поставим вопрос: при каких условиях существует координатная система (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3), в которой скобки Кристоффеля равны нулю не только в данной точке или вдоль некоторой линии, но и в некоторой конечной области?

Если такая координатная система существует, то должно существовать решение уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho} = 0, \tag{42.08}$$

так как им удовлетворяют функции

$$\varphi = x'_0; \quad \varphi = x'_1; \quad \varphi = x'_2; \quad \varphi = x'_3. \tag{42.09}$$

Для совместности уравнений (42.08) очевидно необходимо, чтобы вычисляемые из различных уравнений этой системы выражения для третьих производных между собой совпадали. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\Gamma^\rho_{\mu\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right). \end{aligned}\right\} \tag{42.10}$$

Ввиду равенства левых частей правые части должны быть равны. Приравнивая их, производя дифференцирование и выражая вторые производные через первые, получаем

$$\left(\frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho} = 0. \tag{42.11}$$

Эти равенства должны иметь место при $\varphi = x'_0$; $\varphi = x'_1$; $\varphi = x'_2$; $\varphi = x'_3$. Так как определитель

$$D = \frac{D(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)}{D(x_0, x_1, x_2, x_3)} \tag{42.12}$$

не равен нулю, то должны равняться нулю все коэффициенты при $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}$ в (42.11), т. е. все выражения

$$R^\rho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}. \tag{42.13}$$

Докажем, что условия

$$R^{\rho}_{\mu,\nu\alpha} = 0 \tag{42.14}$$

являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы система уравнений (42.08) имела решение. Для этого положим

$$\varphi_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \tag{42.15}$$

и напишем систему уравнений (42.08) в виде

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\varphi_\rho. \tag{42.16}$$

Пусть значения φ_ν заданы в некоторой точке с координатами $\overset{0}{x}_\alpha$. Чтобы получить их для произвольной точки x_α, соединим обе точки какой-нибудь кривой

$$x_\alpha = \xi^\alpha(p), \tag{42.17}$$

где p — параметр, и будем рассматривать φ_ν (а также $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$) как функции от p. Для определения φ_ν мы получим систему обыкновенных уравнений

$$\frac{d\varphi_\nu}{dp} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\varphi_\rho, \tag{42.18}$$

где точка означает производную по параметру p.

Эта система однозначно определяет значения φ_ν в конечной точке кривой. Остается показать, что получаемые таким путем значения φ_ν не зависят от вида кривой, соединяющей начальную и конечную точки. Для этого рассмотрим между теми же двумя точками бесконечно близкую кривую

$$x_\alpha = \xi^\alpha(p) + \delta\xi^\alpha(p), \tag{42.19}$$

где $\delta\xi^\alpha$ — бесконечно малый вектор, который обращается в нуль в начальной и в конечной точке. Значения φ_ν на измененной кривой обозначим через $\varphi_\nu + \delta\varphi_\nu$.

Уравнения, определяющие $\varphi_\nu + \delta\varphi_\nu$ будут, очевидно, иметь вид

$$\frac{d}{dp}(\varphi_\nu + \delta\varphi_\nu) = \left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\delta\xi^\alpha\right)(\dot{\xi}^\mu + \delta\dot{\xi}^\mu)(\varphi_\rho + \delta\varphi_\rho). \tag{42.20}$$

Вычитая из них (42.18) и отбрасывая бесконечно малые высших порядков, получим

$$\frac{d}{dp}(\delta\varphi_\nu) = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\dot{\xi}^\mu\varphi_\rho\delta\xi^\alpha + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\delta\varphi_\rho + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\varphi_\rho\delta\dot{\xi}^\mu. \tag{42.21}$$

Используя еще раз (42.18) и вводя обозначение (42.13), мы можем эти уравнения привести к виду

$$\frac{d}{dp}(\delta\varphi_\nu - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}\varphi_\rho\delta\xi^\alpha) = R^{\rho}_{\nu,\mu\alpha}\varphi_\rho\dot{\xi}^\mu\delta\xi^\alpha + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu(\delta\varphi_\rho - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho}\varphi_\sigma\delta\xi^\alpha). \tag{42.22}$$

Положим для краткости

$$\eta_\nu = \delta\varphi_\nu - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}\varphi_\rho\delta\xi^\alpha. \qquad (42.23)$$

При условии (42.14) уравнения (42.22) напишутся:

$$\frac{d\eta_\nu}{dp} = \Gamma^\rho_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\eta_\rho. \qquad (42.24)$$

Таким образом, уравнения для η_ν имеют тот же вид, как уравнения (42.18) для φ_ν. (Те и другие представляют уравнения параллельного переноса вектора вдоль рассматриваемой кривой.) Так же как и φ_ν, величины η_ν однозначно определяются из начальных условий. Но начальные условия для величин η_ν — нулевые. В самом деле, координаты начальной точки фиксированы; следовательно, в ней $\delta\xi^\alpha = 0$. Кроме того, в начальной точке фиксированы значения φ_ν, следовательно, в ней также и $\delta\varphi_\nu = 0$. Тем самым в начальной точке $\eta_\nu = 0$. Но при таких начальных условиях будет вдоль всей кривой

$$\eta_\nu = 0 \qquad (42.25)$$

и, следовательно,

$$\delta\varphi_\nu = \Gamma^\rho_{\alpha\nu}\varphi_\rho\delta\xi^\alpha. \qquad (42.26)$$

Рассматривая теперь конечную точку кривой, координаты которой также фиксированы, мы будем иметь для нее $\delta\xi^\alpha = 0$ и, вследствие (42.26), $\delta\varphi_\nu = 0$. Но это значит, что функция φ_ν приходит в конечную точку с одним и тем же значением, как по первоначальной, так и по измененной бесконечно близкой кривой. Деформируя кривую непрерывным образом, мы получим тот же результат для любых двух кривых, соединяющих заданные начальную и конечную точки (необязательно бесконечно близких). Отсюда следует, что в любой односвязной области величины φ_ν представляют однозначные функции точки, которые определяются их значениями в одной какой-нибудь (начальной) точке.

В силу дифференциальных уравнений (42.16) мы имеем

$$\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}, \qquad (42.27)$$

так как величины $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ симметричны относительно своих нижних значков. Отсюда следует, что выражение

$$d\varphi = \varphi_\nu dx_\nu \qquad (42.28)$$

представляет полный дифференциал. Интегрируя его и определяя постоянную из заданного значения φ в начальной точке, мы закончим определение функции φ.

Мы доказали, что необходимым и достаточным условием существования решения уравнений (42.08) является равенство нулю выражения (42.13). При этом функция φ определяется, с точностью до аддитивной постоянной, значениями ее частных производных по координатам в одной точке.

Если даны два решения, φ и ψ, уравнений (42.08) (которые могут и совпадать), то выражение

$$\varphi_\nu \psi^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \tag{42.29}$$

остается, в силу этих уравнений, постоянным. Для доказательства достаточно составить ковариантную производную от скаляра (42.29) и убедиться, что она равна нулю. [Напомним, что уравнение (42.16) как раз и выражает равенство нулю ковариантной производной от φ_ν].

Обозначим через x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 четыре решения уравнений (42.08), выбранные так, чтобы в начальной точке было

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} \tag{42.30}$$

(по α не суммируется!). Тогда равенство (42.30) будет иметь место и при всех значениях координат. Отсюда чисто алгебраическим путем получаем

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x'_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_k}{\partial x_\beta}, \tag{42.31}$$

т. е. представление $g_{\alpha\beta}$ в виде (35.15), а следовательно, и приведение ds^2 к виду (35.09).

Таким образом, необходимым и достаточным условием приводимости квадратичной формы

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{42.32}$$

к виду

$$ds^2 = (dx'_0)^2 - (dx'_1)^2 - (dx'_2)^2 - (dx'_3)^2 \tag{42.33}$$

является равенство нулю выражения

$$R^\rho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}, \tag{42.13}$$

составленного из скобок Кристоффеля, вычисленных для квадратичной формы (42.32).

§ 43. Тензор кривизны

Введенное в предыдущем параграфе выражение

$$R^\rho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} \tag{43.01}$$

играет большую роль в общем тензорном анализе и в теории тяготения. Поэтому мы должны подробно исследовать его свойства.