жения (42.13). При этом функция φ определяется, с точностью до аддитивной постоянной, значениями ее частных производных по координатам в одной точке.

Если даны два решения, φ и ψ, уравнений (42.08) (которые могут и совпадать), то выражение

$$\varphi_\nu \psi^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \tag{42.29}$$

остается, в силу этих уравнений, постоянным. Для доказательства достаточно составить ковариантную производную от скаляра (42.29) и убедиться, что она равна нулю. [Напомним, что уравнение (42.16) как раз и выражает равенство нулю ковариантной производной от φ_ν].

Обозначим через x_0', x_1', x_2', x_3' четыре решения уравнений (42.08), выбранные так, чтобы в начальной точке было

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} \tag{42.30}$$

(по α не суммируется!). Тогда равенство (42.30) будет иметь место и при всех значениях координат. Отсюда чисто алгебраическим путем получаем

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_k'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_k'}{\partial x_\beta}, \tag{42.31}$$

т. е. представление $g_{\alpha\beta}$ в виде (35.15), а следовательно, и приведение ds^2 к виду (35.09).

Таким образом, необходимым и достаточным условием приводимости квадратичной формы

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{42.32}$$

к виду

$$ds^2 = (dx_0')^2 - (dx_1')^2 - (dx_2')^2 - (dx_3')^2 \tag{42.33}$$

является равенство нулю выражения

$$R^\rho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}, \tag{42.13}$$

составленного из скобок Кристоффеля, вычисленных для квадратичной формы (42.32).

§ 43. Тензор кривизны

Введенное в предыдущем параграфе выражение

$$R^\rho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} \tag{43.01}$$

играет большую роль в общем тензорном анализе и в теории тяготения. Поэтому мы должны подробно исследовать его свойства.

Докажем прежде всего, что это выражение есть тензор. Доказательство можно провести различными способами. Наиболее непосредственно этот результат может быть получен путем дифференцирования уравнения

$$\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} = -(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})' \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}, \tag{43.02}$$

выражающего, согласно (42.04), закон преобразования скобок Кристоффеля. Результат дифференцирования (43.02) по x_λ может быть записан в виде

$$\frac{\partial^3 x'_\sigma}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\nu} + (\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})' \left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} + \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \right) =$$
$$= \left(\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\tau\lambda} \right) \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} -$$
$$- \left(\frac{\partial (\Gamma^\sigma_{\beta\gamma})'}{\partial x'_\alpha} + (\Gamma^\tau_{\beta\gamma})' (\Gamma^\sigma_{\tau\alpha})' \right) \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\nu}. \tag{43.03}$$

Здесь левая часть симметрична относительно значков λ, μ, ν; следовательно, должна быть симметрична и правая часть. Переставляя в правой части значки λ и ν и приравнивая результат перестановки значению правой части в первоначальном виде, мы получим формулу, которую, при использовании обозначения (43.01), можно написать в виде

$$R^\rho_{\mu,\nu\lambda} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} = (R^\sigma_{\beta,\gamma\alpha})' \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\nu}. \tag{43.04}$$

Эта формула и выражает тот факт, что $R^\rho_{\mu,\nu\lambda}$ представляет тензор четвертого ранга, ковариантный относительно значков μ, ν, λ и контравариантный относительно значка ρ. Тензор этот называется тензором кривизны.

При помощи тензора кривизны можно выразить изменение вектора при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура. Пусть значение вектора A_ρ в начальной точке x^0_α есть $(A_\rho)_0$. При переносе его в бесконечно близкую точку значения его составляющих будут равны

$$A_\rho = (A_\rho)_0 + (\Gamma^\sigma_{\alpha\rho})_0 (A_\sigma)_0 (x_\alpha - x^0_\alpha) \tag{43.05}$$

с точностью до величин второго порядка малости *) относительно смещений $x_\alpha - x^0_\alpha$. Очевидно, что изменения ΔA_μ вектора A_μ после обхода по бесконечно малому контуру будут по крайней мере вто-

*) Эти величины второго порядка уже будут зависеть от вида кривой, по которой производится смещение (вектор A_ρ не есть функция точки).

рого порядка малости относительно наибольших смещений. Эти изменения выражаются криволинейным интегралом

$$\Delta A_\mu = \int \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho \, dx_\nu, \tag{43.06}$$

взятым по рассматриваемому контуру. В случае бесконечно малого контура можно заменить под интегралом величину A_ρ выражением (43.05), а величину $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ — выражением

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = (\Gamma^\rho_{\mu\nu})_0 + \left(\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)_0 (x_\alpha - x^0_\alpha). \tag{43.07}$$

Подставляя (43.05) и (43.07) в (43.06) и учитывая, что интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю, мы получим

$$\Delta A_\mu = \left[\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha}\right]_0 (A_\rho)_0 \int (x_\alpha - x^0_\alpha)\, dx_\nu. \tag{43.08}$$

Величины

$$Q^{\nu\alpha} = \int (x_\alpha - x^0_\alpha)\, dx_\nu = \frac{1}{2}\int [(x_\alpha - x^0_\alpha)\, dx_\nu - (x_\nu - x^0_\nu)\, dx_\alpha] \tag{43.09}$$

можно толковать как проекции охватываемой контуром площадки на координатные „плоскости“. Они представляют, как легко видеть, контравариантный антисимметричный тензор. Пользуясь антисимметрией тензора $Q^{\nu\alpha}$, можно написать формулу (43.08) в виде

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} R^\rho_{\mu,\nu\alpha} A_\rho Q^{\nu\alpha} \tag{43.10}$$

(относящийся к начальной точке значок 0 нами опущен).

Путем аналогичных рассуждений для изменения контравариантных составляющих вектора получается формула

$$\Delta A^\sigma = -\frac{1}{2} R^\sigma_{\rho,\nu\alpha} A^\rho Q^{\nu\alpha}. \tag{43.11}$$

Мы уже знаем, что $R^\rho_{\mu,\nu\alpha}$ есть тензор; это заключение можно было бы вывести и на основании формулы (43.10) или (43.11). В самом деле, ΔA_μ есть разность двух векторов, относящихся к одной точке и, следовательно, представляет собою вектор. С другой стороны, если добавить к антисимметричному тензору $Q^{\nu\alpha}$ произвольную симметричную часть, то уравнение (43.10) не изменится. Таким образом, правая часть (43.10) будет вектором, каков бы ни был тензор $Q^{\nu\alpha}$ и вектор A_ρ, что возможно только в том случае, когда $R^\rho_{\mu,\nu\alpha}$ есть тензор.

В § 40 мы ввели операцию ковариантного дифференцирования. В общем случае операции эти не коммутативны: вторая ковариантная производная от вектора или тензора, взятая сперва по x_β, а затем по x_α, не будет равна такой же производной, взятой сперва по x_α, а затем по x_β. Рассмотрим разность вторых производных от вектора. Мы имеем, согласно (40.05):

$$\nabla_\beta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\nu_{\mu\beta} A_\nu. \tag{43.12}$$

Вычислим $\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu$ в локально-геодезической системе координат (в которой первые производные от $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ обращаются в нуль для данной точки). Мы имеем

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} A_\nu, \tag{43.13}$$

откуда

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha A_\mu = \left(\frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} \right) A_\nu. \tag{43.14}$$

В локально-геодезической системе множитель при A_ν в правой части не отличается от выражения для тензора кривизны, которое равно

$$R^\nu_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\sigma\alpha}. \tag{43.15}$$

Поэтому в локально-геодезической системе имеет место равенство

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A_\mu = R^\nu_{\mu,\alpha\beta} A_\nu. \tag{43.16}$$

Но обе части этого равенства представляют собою тензор. Поэтому, если равенство (43.16) справедливо в какой-нибудь одной системе координат, то оно справедливо и в произвольной системе координат. Таким образом, выражение (43.16) для разности вторых ковариантных производных от вектора является общим.

Аналогично выводится формула

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A^\nu = -R^\nu_{\mu,\alpha\beta} A^\mu \tag{43.17}$$

для контравариантного вектора.

Использованный здесь прием составления тензорного уравнения в локально-геодезической координатной системе, с последующим заключением о том, что оно справедливо и в общем случае, может значительно облегчить выкладки. Уравнения (43.16) и (43.17) настолько просты, что легко могут быть получены и без применения этого приема, но в других случаях вносимое им упрощение существенно.

Рассмотрим, например, выражение для разности вторых ковариантных производных от тензора произвольного ранга

$$U^{(\mu)}_{(\nu)} = U^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_k}. \tag{43.18}$$

Формулу (40.26) для первой производной можно написать в виде

$$\nabla_\beta U_{(\nu)}^{(\mu)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(U_{(\nu)}^{(\mu)}\right) + \sum_{i=1}^{m} \Gamma^{\mu_i}_{\rho\beta} U_{(\nu)}^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m} - \sum_{j=1}^{k} \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_j} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \quad (43.19)$$

Составляя, в геодезической системе координат, вторую производную, получим

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta U_{(\nu)}^{(\mu)} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(U_{(\nu)}^{(\mu)}\right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\Gamma^{\mu_i}_{\rho\beta}}{\partial x_\alpha} U_{(\nu)}^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\beta\nu_j}}{\partial x_\alpha} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \quad (43.20)$$

Следовательно, разность вторых производных будет, в геодезической системе, совпадать с выражением

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\, U_{(\nu)}^{(\mu)} = -\sum_{i=1}^{m} R^{\mu_i}_{\rho,\,\alpha\beta} U_{(\nu)}^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m} + \sum_{j=1}^{k} R^{\rho}_{\nu_j,\,\alpha\beta} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \quad (43.21)$$

А так как обе части этого выражения представляют собою тензоры, то равенство (43.21) будет справедливо и в произвольной координатной системе.

§ 44. Основные свойства тензора кривизны

Рассмотрим наряду со смешанным тензором кривизны

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\rho\beta} - \Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\rho\alpha} \quad (44.01)$$

ковариантный тензор

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = g_{\nu\sigma} R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta}. \quad (44.02)$$

Согласно этому определению, смешанный тензор $R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta}$ получается из $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$, поднятием *второго* ковариантного значка. Поэтому более подробным обозначением для него было бы

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = R_{\mu,\,\alpha\beta}^{\cdot\sigma\cdot\cdot} = g^{\sigma\nu} R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}. \quad (44.03)$$