Формулу (40.26) для первой производной можно написать в виде

$$\nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(U^{(\mu)}_{(\nu)}\right) + \sum_{i=1}^{m} \Gamma^{\mu_i}_{\rho\beta} U^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m}_{(\nu)} - \\ - \sum_{j=1}^{k} \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_j} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \qquad (43.19)$$

Составляя, в геодезической системе координат, вторую производную, получим

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(U^{(\mu)}_{(\nu)}\right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Gamma^{\mu_i}_{\rho\beta}}{\partial x_\alpha} U^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m}_{(\nu)} - \\ - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_j}}{\partial x_\alpha} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \qquad (43.20)$$

Следовательно, разность вторых производных будет, в геодезической системе, совпадать с выражением

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) U^{(\mu)}_{(\nu)} = -\sum_{i=1}^{m} R^{\mu_i}_{\rho,\,\alpha\beta} U^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m}_{(\nu)} + \\ + \sum_{j=1}^{k} R^{\rho}_{\nu_j,\,\alpha\beta} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \qquad (43.21)$$

А так как обе части этого выражения представляют собою тензоры, то равенство (43.21) будет справедливо и в произвольной координатной системе.

§ 44. Основные свойства тензора кривизны

Рассмотрим наряду со смешанным тензором кривизны

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\rho\beta} - \Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\rho\alpha} \qquad (44.01)$$

ковариантный тензор

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = g_{\nu\sigma} R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta}. \qquad (44.02)$$

Согласно этому определению, смешанный тензор $R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta}$ получается из $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$, поднятием *второго* ковариантного значка. Поэтому более подробным обозначением для него было бы

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = R_{\mu,\,\alpha\beta}^{\cdot\sigma\cdot\cdot} = g^{\sigma\nu} R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}. \qquad (44.03)$$

Заметим, что в старой литературе для ковариантного и для смешанного тензора приняты обозначения

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = (\mu\nu,\ \alpha\beta), \tag{44.04}$$

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = \{\mu\sigma,\ \alpha\beta\}, \tag{44.05}$$

называемые четырехзначковыми символами Римана первого и второго рода.

Вычисляя по формуле (44.02) ковариантный тензор кривизны, будем иметь

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}[\mu\alpha,\ \nu] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\mu\beta,\ \nu] + \\ + \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\left([\rho\beta,\ \nu] - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\beta}\right) - \Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\left([\rho\alpha,\ \nu] - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\alpha}\right), \tag{44.06}$$

и окончательно:

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\beta}\right) - \\ - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}[\nu\beta,\ \rho] + \Gamma^{\rho}_{\mu\beta}[\nu\alpha,\ \rho]. \tag{44.07}$$

Выражая последние два члена через величины $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, можно также написать

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\beta}\right) - \\ - g_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} + g_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}. \tag{44.08}$$

Из этого выражения легко вывести следующие свойства симметрии данного тензора:

1) Антисимметрия в первых двух значках

$$R_{\nu\mu,\,\alpha\beta} = -R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}. \tag{44.09}$$

2) Антисимметрия в последних двух значках

$$R_{\mu\nu,\,\beta\alpha} = -R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}. \tag{44.10}$$

3) Циклическая симметрия

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} + R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} + R_{\mu\beta,\,\nu\alpha} = 0. \tag{44.11}$$

Первые два свойства очевидны. Чтобы проверить последнее, достаточно составить левую часть (44.11) в локально-геодезической координатной системе и убедиться, что 12 вторых производных попарно сокращаются.

Из перечисленных трех свойств вытекает, далее, что первая пара значков может быть переставлена с последней парой значков (с сохранением их порядка внутри каждой пары):

$$R_{\alpha\beta,\,\mu\nu} = R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}. \tag{44.12}$$

Свойство (44.12) непосредственно вытекает из определения (44.08). Чтобы показать, что оно не является независимым, а представляет следствие первых трех свойств, достаточно составить сумму уравнения (44.11) и трех других уравнений, получаемых из (44.11) круговой перестановкой значков (μ, ν, α, β). Если учесть свойства антисимметрии 1) и 2), то из 12 членов этой суммы 8 попарно сократятся, а остальные 4 дадут

$$-2R_{\mu\alpha,\,\nu\beta} + 2R_{\nu\beta,\,\mu\alpha} = 0, \tag{44.13}$$

что отличается от (44.12) лишь обозначением значков.

Подсчитаем число независимых компонент тензора кривизны, причем сделаем это в предположении, что каждый значок принимает n значений (фактически $n = 4$). Очевидно, что все четыре значка не могут быть одинаковыми. Отличные от нуля компоненты с двумя разными значками приводятся к типу $R_{\alpha\beta,\,\alpha\beta}$. Их столько, сколько пар неодинаковых значков, т. е. $\frac{1}{2}n(n-1)$. Далее, если дана тройка разных чисел α, β, γ [а таких троек $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$], то из нее можно составить отличные от нуля компоненты $R_{\alpha\beta,\,\alpha\gamma}$; $R_{\beta\alpha,\,\beta\gamma}$; $R_{\gamma\alpha,\,\gamma\beta}$, в которых повторяется либо первое, либо второе, либо третье из чисел α, β, γ. Число таких компонент будет равно числу троек, умноженному на 3, т. е. равно $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$. Наконец, существует $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ комбинаций *четырех* различных чисел α, β, γ, δ. Для каждой такой комбинации можно составить компоненты $R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$; $R_{\alpha\delta,\,\beta\gamma}$; $R_{\alpha\gamma,\,\delta\beta}$, тогда как все остальные сочетания значков приводятся к этим. Но эти три компоненты не являются независимыми, так как они связаны условием циклической симметрии; независимыми будут только две из них. Следовательно, число независимых компонент с четырьмя различными значками равно удвоенному числу четверок разных чисел, т. е. равно $\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$. Полное количество независимых компонент будет, таким образом, равно

$$\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3) = \\ = \frac{1}{12}n^2(n^2-1). \tag{44.14}$$

В интересующем нас случае $n = 4$ это число равно

$$6 + 12 + 2 = 20. \tag{44.15}$$

Заметим, что в трехмерном пространстве ($n = 3$) число независимых компонент тензора кривизны равно 6, т. е. числу компонент симметричного тензора второго ранга. Действительно, для $n = 3$ тензор кривизны может быть выражен через симметричный тензор второго ранга. (См. Добавление Д). Наконец, тензор кривизны двухмерной поверхности ($n = 2$) имеет только одну компоненту — гауссову кривизну.

Напомним, что в § 31 мы уже встречались с величинами, обладающими теми же свойствами симметрии, как ковариантный тензор кривизны, причем мы отметили там связь этих величин с симметричным тензором Круткова.

Мы изучили свойства ковариантного тензора кривизны. Смешанный тензор кривизны обладает аналогичными свойствами

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\beta\alpha} = -R^{\sigma}_{\beta,\,\mu\alpha}, \tag{44.16}$$

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} + R^{\sigma}_{\alpha,\,\beta\mu} + R^{\sigma}_{\beta,\,\mu\alpha} = 0, \tag{44.17}$$

которые соответствуют (44.10) и (44.11). Что касается свойства, соответствующего (44.09), то оно записывается более сложным образом, а именно:

$$g_{\sigma\nu} g^{\rho\mu} R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = -R^{\rho}_{\nu,\,\alpha\beta} \tag{44.18}$$

(поднятие первого нижнего и опускание верхнего значка меняют знак компоненты). Это свойство легко вывести независимо от (44.09) из сопоставления (43.10) с (43.11) или (43.16) с (43.17), или же, наконец, из равенства

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)\, g_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu,\,\alpha\beta}\, g_{\rho\nu} + R^{\rho}_{\nu,\,\alpha\beta}\, g_{\rho\mu} = 0, \tag{44.19}$$

вытекающего из общей формулы (43.21).

Наряду с рассмотренными выше алгебраическими соотношениями, тензор кривизны удовлетворяет дифференциальным соотношениям, которые могут быть написаны в виде

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda,\,\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu,\,\alpha\beta} = 0 \tag{44.20}$$

и носят название тождеств Бианки. Чтобы проверить их, мы введем локально-геодезическую координатную систему, в которой тензориальные производные совпадают с обыкновенными. Вычисления облегчаются тем, что в выражении (44.08) для $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$ члены, не содержащие вторых производных, квадратичны относительно $\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$, так что не только сами эти члены, но и их первые производные обращаются в локально геодезической системе в нуль. В этой системе левая часть (44.20) равна

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} R_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} R_{\nu\lambda,\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} R_{\lambda\mu,\alpha\beta} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda \partial x_\alpha} + \frac{\partial^3 g_{\lambda\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\nu\beta}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\alpha} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda \partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\lambda\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{2}(\ldots), \tag{44.21}$$

где многоточием обозначены такие же члены, но с переставленными значками α и β. Но выражение в скобках само симметрично относительно α и β, так что вторая скобка равна первой и их разность обращается в нуль. Тем самым доказано, что равенство (44.20) выполняется в локально-геодезической координатной системе, а ввиду тензорного характера этого равенства оно справедливо и вообще.

Из тензора кривизны четвертого ранга можно составить, путем свертывания по двум значкам, тензор второго ранга. Свертывание по двум первым или по двум последним значкам дает, очевидно, нуль, свертывание же по остальным парам значков дает, с точностью до знака, один и тот же результат. Получаемый таким путем тензор

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\beta\nu} = R^{\beta}_{\mu,\beta\nu} \tag{44.22}$$

носит название тензора кривизны второго ранга или тензора Римана. Легко видеть, что тензор Римана будет симметричным. В самом деле, используя (44.09), (44.10) и (44.12), будем иметь

$$g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\beta\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\nu,\mu\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\nu\beta,\alpha\mu} = g^{\alpha\beta} R_{\nu\alpha,\beta\mu} \tag{44.23}$$

или

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{44.24}$$

Наряду с ковариантным тензором Римана рассматриваются также смешанный тензор

$$R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho} R_{\rho\nu} \tag{44.25}$$

и контравариантный тензор

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma}. \tag{44.26}$$

Дальнейшее свертывание по значкам μ, ν приводит к скаляру

$$R = R^{\nu}_{\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\beta\nu}, \tag{44.27}$$

который носит название скаляра кривизны.

Вычислим расходимость тензора Римана

$$Y_\nu = \nabla_\lambda R^{\lambda}_{\nu} = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda R_{\mu\nu}. \tag{44.28}$$

Вводя вместо $R_{\mu\nu}$ выражение (44.22), будем иметь

$$Y_\nu = g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\lambda R_{\mu\alpha,\,\beta\nu}. \tag{44.29}$$

Применим к входящей сюда тензориальной производной тождества Бианки, написанные в форме

$$\nabla_\lambda R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} + \nabla_\beta R_{\mu\alpha,\,\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\mu\alpha,\,\lambda\beta} = 0, \tag{44.30}$$

получаемой из (44.20) на основании (44.12). Мы получим

$$Y_\nu = -g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta R_{\mu\alpha,\,\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\nu R_{\mu\alpha,\,\lambda\beta}. \tag{44.31}$$

Это соотношение может быть переписано в виде

$$Y_\nu = -Y_\nu + \nabla_\nu R. \tag{44.32}$$

В самом деле, если в первой сумме формулы (44.31) переставить (переименовать) значки суммирования λ с β и μ с α, то она приведется к выражению (44.29); в последнем же члене этой формулы можно произвести суммирование до ковариантного дифференцирования, и тогда этот член приводится к $\nabla_\nu R$. Таким образом,

$$Y_\nu = \frac{1}{2} \nabla_\nu R = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_\nu}, \tag{44.33}$$

так как тензориальная производная от скаляра сводится к обыкновенной производной. Из сопоставления (44.28) с (44.33) следует, что расходимость тензора

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{44.34}$$

тождественно равна нулю. Тензор $G_{\mu\nu}$ называется поэтому консервативным тензором. Так как он играет большую роль в теории тяготения Эйнштейна, то его называют также тензором Эйнштейна.

Дальнейшие преобразования тензора кривизны мы отложим до главы V, посвященной теории тяготения.